УДК 517.926.4:517.977.1

СИНТЕЗ АСИНХРОННОГО РЕЖИМА В ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ С НЕВЫРОЖДЕННЫМ НИЖНИМ ДИАГОНАЛЬНЫМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ[1]

А. К. Деменчук
доктор физико-математических наук, профессор
Институт математики НАН Беларуси

Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем множество его частот содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Предполагается, что у матрицы при управлении есть линейно зависимые столбцы, усреднение матрицы коэффициентов приводится к специальному виду с невырожденным правым нижним диагональным блоком и остальными тривиальными блоками. Для рассматриваемого класса систем указаны достаточные условия, при выполнении которых осуществляется построение управляющего воздействия, переводящего систему в асихронный режим.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система управления, сильно нерегулярное периодическое решение, асинхронный спектр.

Введение и постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{z} = A_1(t)z + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в которой $A_1(t)$ – непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица, B – постоянная $n \times r$-матрица $r \leq n$, u – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах в предположении совпадения частот решения и самой системы (см., напр., [1, 2] и др.). Такой подход был обусловлен тем, что до середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы. Такого рода утверждение содержалось, например, в монографии [3, с. 11]. В 1950 г. на его ошибочность указал Х. Массера в работе [4]. Он впервые привел условия существования решений дифференциальных систем с иррациональным отношением периодов решения и системы. Отмеченный результат Х. Массеры положил начало новому направлению в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось Я. Курцвейлем и О. Вейводой [5], Н. П. Еругиным [6], И. В. Гайшуном [7], Э. И. Грудо, [8], В. Т. Боруховым [9] и др. Такие периодические решения и их обобщения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Эффект асинхронного

[1] Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси по заданию 1.2.01 «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем» ГПНИ “Конвергенция – 2025” (подпрограмма “Математические модели и методы”) в рамках гранта Президента Республики Беларусь.

возбуждение незатухающих колебаний нашел реализацию в ряде технических устройств [10; 11]. Задача построения периодических дифференциальных систем, функционирующих в асинхронном режиме, сформулирована в работе [12] как задача управления асинхронным спектром.

В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество частот которых содержится в модуле частот матрицы коэффицентов. Применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = u(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы замкнутая система

$$\dot{z} = A_1(t)z + Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с множеством частот L.

Если же требовать наличие у системы (3) только сильно нерегулярного решения, без наперед заданного целевого множества, то такую, несколько менее жесткую задачу, будем называть задачей синтеза асихронного режима (возбуждения асинхронных колебаний).

Вопросы разрешимости сформулированных задач для системы (1) с нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в работе [13]. В [14] рассмотрена система (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов имеет невырожденный левый верхний диагональный блок и остальныее ее блоки – нулевые. Вопрос исследования системы (1) с правым нижним блоком усреднения матрицы коэффициентов оставался открытым. В настоящей статье дано решение задачи управления асинхронным спектром в случае, когда система (1) приводится к виду с невырожденным указанным диагональным блоком.

Вспомогательные сведения. Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной $n\times m$-матричной функции $F(t)$ (вектора при $m=1$) определим ее среднее значение

$$\hat{F} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} F(t)dt$$

и осциллирующую часть

$$\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}\,.$$

Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ – наибольшее число линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}F$. Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги периодической матрицы не обязаны совпадать. Например, для 2π-периодической матрицы

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 2\sin t \\ \cos t & 2\cos t \end{pmatrix}.$$

Имеем $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}F = 1$, а $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}F = 2$. Сказанное, разумеется, не относится к постоянным матрицам.

Частотами ω-периодической функции являются числа вида $k\dfrac{2\pi}{\omega}, \quad k \in N$.

Определение. Решение с периодом Ω системы (3) называется сильно нерегулярным, если числа ω и Ω несоизмеримы, т. е. их отношение является иррациональным числом.

На основании [15, с. 20] можно сформулировать необходимые в дальнейшем следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть у постоянной $n \times r$-матрицы B число строк не меньше числа столбцов и столбцы линейно зависимы

$$\operatorname{rank} B = r_1 < r, \quad r \le n. \tag{4}$$

Тогда найдется постоянная неособенная $n \times n$-матрица S такая, что

$$SB = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1,r} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B_{r_1,r} = r_1. \tag{5}$$

Лемма 2. Пусть $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} F = m_1 < m$. Тогда найдется постоянная неособенная $m \times m$-матрица Q такая, что у матрицы $F(t)Q$ будет $m - m_1$ нулевых первых столбцов, в то время как остальные m_1 столбцов будут линейно независимы.

Из работы [16] вытекает

Лемма 3. Если столбцы ω-периодической матрицы $F(t)$ линейно независимы, то у линейной алгебраической однородной системы

$$F(t)z = 0$$

отсутствуют сильно нерегулярные периодические решения $z = z(t)$, отличные от тривиального.

Основная часть. В случае, когда столбцы матрицы при управлении линейно независимы, решение задачи управления асинхронным спетром для системы (1) приведено в [17]. Поэтому далее полагаем, что выполняется неравенство (4). В таком случае, согласно лемме 1, стандартными средствами линейной алгебры можно построить матрицу S со свойством (5).

Основное предположение настоящей работы состоит в следующем. Допустим, что среднее значение $\hat{A}_1$ матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\hat{A} = S^{-1}\hat{A}_1 S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}^{(22)}_{r_1,r_1} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{(22)}_{r_1,r_1} = \operatorname{diag}(\hat{a}_{n-r_1+1,\ n-r_1+1}, \dots, \hat{a}_{n,n}), \quad \det \hat{A}^{(22)}_{r_1,r_1} \ne 0. \tag{6}$$

Через $A^{(1)}(t)$ обозначим $(n - r_1) \times n$-матрицу, составленную из первых $n - r_1$ строк матрицы $A(t) = S^{-1}A_1(t)S$.

Справедлива

Теорема. *Пусть наряду с предположениями (4) , (6) выполняется условие*

$$\operatorname{rank}_{col} A^{(1)} = k < n. \tag{7}$$

Тогда существует ω-периодическое управление $u = u(t)$, переводящее систему в асинхронный режим.

Доказательство. Искомое программное управление будем искать в виде

$$u = u(t) = \hat{u} + \tilde{u}(t).$$

Согласно постановке задачи управление должно быть таким, чтобы у замкнутой таким управлением системы (3) появилось сильно нерегулярное решение $z = z(t)$ с некоторым множеством частот. Из работы [8] следует, что в смысле существования требуемого периодического решения $z(t)$ система (3) эквивалентна следующей системе:

$$\dot{z} = \hat{A}_1 z + B\hat{u}, \quad \tilde{A}_1(t)z + B\tilde{u}(t) = 0. \tag{8}$$

Поэтому поставленная задача сводится к построению такой вектор-функции $u(t)$ из допустимого множества, чтобы система (8) имела решение $z(t)$.

Выполним замену фазовой переменной

$$z = Sx, \tag{9}$$

которая приводит систему (8) к системе

$$\dot{x} = \hat{A}x + D\hat{u}, \quad \tilde{A}(t)x + D\tilde{u}(t) = 0, \quad A(t) = S^{-1}A_1(t)S, \quad D = SB.$$

В соответствии с представлением матрицы D в виде (5)

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1,r} \end{pmatrix},$$

с целью согласования размерностей, примем следующие обозначения для матрицы $A(t)$. Пусть $A^{(11)}_{n-r_1,n-r_1}(t)$, $A^{(21)}_{r_1,n-r_1}(t)$ – ее левые верхний и нижний, а $A^{(12)}_{n-r_1,r_1}(t)$, $A^{(22)}_{r_1,r_1}(t)$ – правые верхний и нижний блоки (нижние индексы указывают размерность):

$$A(t) = \begin{pmatrix} A^{(11)}_{n-r_1,n-r_1}(t) & A^{(12)}_{n-r_1,r_1}(t) \\ A^{(21)}_{r_1,n-r_1}(t) & A^{(22)}_{r_1,r_1}(t) \end{pmatrix}.$$

Соответственно такому представлению усредненную матрицу $\hat{A}$ в свою очередь разобьем на четыре блока таких же размерностей:

$$\hat{A}^{(11)}_{n-r_1,n-r_1}, \ \hat{A}^{(21)}_{r_1,n-r_1}, \ \hat{A}^{(12)}_{n-r_1,r_1}, \ \hat{A}^{(22)}_{r_1,r_1},$$

среди которых, с учетом условия (6), только последний нетривиален. Аналогично представим и осциллирующую часть $\tilde{A}(t)$:

$$\tilde{A}^{(11)}_{n-r_1,n-r_1}(t), \ \tilde{A}^{(21)}_{r_1,n-r_1}(t), \ \tilde{A}^{(12)}_{n-r_1,r_1}(t) \ \ \tilde{A}^{(22)}_{r_1,r_1}(t).$$

Далее для упрощения записи нижние индексы у этих матриц опускаем. Положим для фазового вектора

$$x = \mathrm{col}(x', x''), \quad x' = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_{n-r_1}), \quad x'' = \mathrm{col}(x_{n-r_1+1}, \ldots, x_n).$$

Тогда последняя система примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{(11)} & \hat{A}^{(12)} \\ \hat{A}^{(21)} & \hat{A}^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1,r} \end{pmatrix} \hat{u},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^{(11)}(t) & \tilde{A}^{(12)}(t) \\ \tilde{A}^{(21)}(t) & \tilde{A}^{(22)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1,r} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) = 0,$$

откуда в силу прежположения (6) о нетривиальности только правого нижнего блока усреднения матрицы коэффициентов получаем систему:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}' = 0,\\
&\dot{x}'' = \hat{A}^{(22)}x'' + B_{r_1,r}\hat{u},\\
&A^{(11)}(t)x' + A^{(12)}(t)x'' = 0,\\
&A^{(21)}(t)x' + \tilde{A}^{(22)}(t)x'' + B_{r_1,r}\tilde{u}(t) = 0.
\end{aligned} \qquad (10)
$$

Заметим, что периодическое решение $x = x'(t)$ первого уравнения системы (10) может быть только стационарным. Поскольку блок $\hat{A}^{(22)}$ диагональный и невырожденный, а неоднородная часть $B_{r_1,r}\hat{u}$ постоянная, то периодическое решение $x = x''(t)$ второго уравнения, а значит, и решение $x' = x'(t),\ x'' = x''(t)$ всей системы (10) также может быть только стационарным.

С учетом принятых ранее обозначений запишем третье уравнение системы (10) в виде

$$A^{(1)}(t)\ \mathrm{col}(x', x'') = 0.$$

В силу условия (7) из леммы 2 следует, что найдется постоянная неособенная $n\times n$-матрица Q такая, что у матрицы $A^{(1)}(t)Q$ первые $n-k$ столбцов будут нулевыми, а остальные k столбцов будут линейно независимыми. Выполнив в этом уравнении замену переменных

$$\mathrm{col}\,(x', x'') = Qy,$$

получим уравнение

$$A^{(1)}(t)\,Q\,y = 0.$$

Поскольку матрица $A^{(1)}(t)Q$ является ω-периодической и ее последние k столбцов линейно независимы, то из леммы 3 вытекает, что соответствующие компоненты сильно нерегулярного периодического решения $y = y(t)$ этого уравнения должны быть нулевыми

$$y(t) = \mathrm{col}\,(y^{(1)}(t), 0, \ldots, 0),$$

где $y^{(1)}(t) = \mathrm{col}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t))$, $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1, n-k}$ – некоторые произвольные периодические функции периода Ω, несоизмеримого с ω. Поскольку выше отмечено, что искомое периодическое решение $x = x(t) = \mathrm{col}(x'(t), x''(t))$ может быть только стационарным, то в силу неособенности матрицы Q вектор $y = y(t)$ также должен быть постоянным. Значит, $\varphi_j(t) \equiv \alpha_j$, $j = \overline{1, n-k}$ и

$$y(t) = \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}, 0, \ldots, 0),$$

где α_j, $j = \overline{1, n-k}$ – некоторые произвольные вещественные постоянные. Поэтому, с учетом произведенной замены переменных, компоненты искомого периодического решения первых двух уравнений системы (10) представимы следующим образом

$$\mathrm{col}\,(x'(t), x''(t)) = Q\,\mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}, 0, \ldots, 0).$$

Уточним вид этого решения. Обозначим матрицу, образованную $n-k$ первыми столбцами матрицы Q через $Q^{(1)}$, и разобъем ее на вертикальные блоки $Q_{11}^{(1)}$, $Q_{21}^{(1)}$, размерностей по строкам соответственно $n-r_1,\ r_1$. Такое разбиение позволит получить более детальный вид последней записи решения

$$\mathrm{col}\,(x'(t), x''(t)) = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(1)} \\ Q_{21}^{(1)} \end{pmatrix} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}),$$

откуда находим

$$x'(t) = Q_{11}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}), \quad x''(t) = Q_{21}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) \ . \ (11)$$

По построению векторы (11) – решение третьего уравнения системы (10). Кроме того, как нетрудно видеть, стационарный вектор $x'(t) = Q_{11}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k})$ является решением ее первого уравнения.

Выясним, при каких условиях вектор $x''(t)$ удовлетворяет второму уравнению системы (10). Для этого, подставляя в это уравнение значение $x''(t) = Q_{21}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}),$ получим условие на стационарную составляющую управления

$$B_{r_1,r}\hat{u} + \hat{A}^{(22)} Q_{21}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) = 0\,. \qquad (12)$$

Иначе говоря, вектор $x''(t)$ будет решением второго уравнения системы (10) лишь тогда, когда вектор $\hat{u}$ удовлетворяет равенству (12).

В силу рангового условия (4) вспомогательное линейное неоднородное матричное уравнение

$$B_{r_1,r} V_{r,r_1} + E = 0$$

с коэффициентом $B_{r_1,r}$ и единичной $r_1 \times r_1$-матрицей E имеет некоторое частное решение $V_{r,r_1} = V$. Несложно убедиться в том, что постоянный вектор

$$\hat{u} = \hat{u}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) = -VA^{(22)} Q_{21}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) \qquad (13)$$

будет удовлетворять равенству (12). Это означает, что при выборе стационарной составляющей управления $\hat{u}$ в виде (13) вектор $x''(t)$ – решение второго уравнения системы (10).

Далее выясним, при каких условиях векторы $x'(t),\ \ x''(t)$ удовлетворяют четвертому уравнению системы (10). С этой целью, подставляя их значения в это уравнение, получим условие на осциллирующую составляющую управления

$$B_{r_1,r}\tilde{u}(t) + A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) = 0\,. \ (14)$$

Другими словами, векторы $x'(t),\ \ x''(t)$ будут решениями последнего уравнения системы (10) лишь тогда, когда вектор $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет равенству (12).

Построим векторно-значную ω-периодическую функцию с нулевым средним значением

$$\tilde{u} = \tilde{u}\,(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) = -V\left(A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) \right). \ (15)$$

Подставляя ее в равенство (14), получим

$$B_{r_1,r}\left(-V\left(A^{(21)}(t)Q_{11}^{(1)}\mathrm{col}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k})+A^{(22)}(t)Q_{21}^{(1)}\mathrm{col}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k})\right)\right)+$$
$$+A^{(21)}(t)Q_{11}^{(1)}\mathrm{col}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k})+A^{(22)}(t)Q_{21}^{(1)}\mathrm{col}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k})=0$$

или, после элементарных преобразований,

$$\left(B_{r_1,r}V+E\right)\left(A^{(21)}(t)Q_{11}^{(1)}+A^{(22)}(t)Q_{21}^{(1)}\right)\mathrm{col}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k})=0\,.$$

Полученное равенство является верным, так как матрица V – решение вспомогательного матричного уравнения, т. е.

$$B_{r_1,r}V+E=0\,.$$

Поэтому при выборе осциллирующей составляющей управления $\tilde{u}(t)$ в виде (15) векторы $x'(t)$, $x''(t)$ – решением последнего уравнения, а вместе с этим и всей системы (10).

Возвращаясь к исходным переменным, принимая во внимание замену (9), находим требуемое решение системы (8)

$$z=z(t)=S^{-1}\mathrm{col}(x'(t),x''(t))\,,$$

которое в силу [8], будет также решением замкнутой системы (3). Таким образом, управлением (13), (15) реализуется асинхронный режим в системе (1).

Теорема доказана.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий конструктивность полученного результата. С этой целью возьмем следующую линейную 2π-периодическую систему управления

$$\dot{x}=A(t)x+Bu=\begin{pmatrix}\sin t & 2\sin t & \sin t\\ \sin 2t & 2\sin 2t & \sin 2t\\ \xi_1(t) & \xi_2(t) & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

в которой $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – произвольные непрерывные периодические с периодом 2π и нулевым средним значением скалярные функции, хотя бы одно из вещественных чисел b_1, b_2, скажем b_1, отлично от нуля.

Вначале проверим условия теоремы. Ранговое условие (4) показывает, что в данном случае ранг r_1 матрицы B меньше числа столбцов и равен единице, при этом в построении преобразования (9) с матрицей S нет необходимости, поскольку B уже приведена к виду (5), а усреднение матрицы коэффициентов

$$\hat{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

согласуется с (6), т. е. правый нижний 1×1-блок невырожденный. Для проверки условия (7) из первых двух строк матрицы $A(t)$ составим 2×3-матрицу

$$A^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}\sin t & 2\sin t & \sin t\\ \sin 2t & 2\sin 2t & \sin t\end{pmatrix}.$$

Как видим, ее столбцовый ранг k равен единице и меньше числа столбцов.

Итак, все условия теоремы выполнены.

Далее для решения поставленной задачи воспользуемся алгоритмом доказательства теоремы. Для исходной системы запишем соответствующий аналог системы (10)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\dot{x}_3 = x_3 + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix},$$

$$A^{(1)}(t)\,\mathrm{col}\,(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sin t & 2\sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2\sin 2t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \qquad (10')$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) & \xi_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\cos t - 1)x_3 + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(t) \\ \tilde{u}_2(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Согласно лемме 2 построим постоянную неособенную матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

такую, что преобразование

$$x = Qy$$

приводит третье из полученных уравнений системы (10’) к виду

$$\begin{pmatrix} \sin t & 2\sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2\sin 2t & \sin t \end{pmatrix} Qy = \begin{pmatrix} \sin t & 2\sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2\sin 2t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда в силу леммы 3 находим структуру сильно нерегулярного периодического решения

$$y_1 = y_1(t) = \varphi_1(t), \quad y_2 = y_2(t) = \varphi_2(t), \quad y_3 = y_3(t) = 0,$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – некоторые непрерывные периодические с периодом Ω, несоизмеримым с 2π. Возвращаясь к исходным переменным

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

находим

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = \varphi_2(t), \quad x_3(t) = -\varphi_1(t) - 2\varphi_2(t).$$

Из первого уравнение из (10’) следует, что $\varphi_1(t) \equiv \alpha_1$, $\varphi_2(t) \equiv \alpha_2$, где α_1, α_2 – некоторые вещественные постоянные, т. е. $x_1(t) \equiv \alpha_1$, $x_2(t) \equiv \alpha_2$, $x_3(t) \equiv -\alpha_1 - 2\alpha_2$.

Подставляя $x_3(t)$ во второе уравнение системы (10’), получаем равенство

$$-\alpha_1 - 2\alpha_2 + b_1\hat{u}_1 + b_2\hat{u}_2 = 0,$$

откуда имеем

$$\hat{u}_1 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{b_1} - \frac{b_2}{b_1}\hat{u}_2,$$

при этом вторая компонента $\hat{u}_2$ стационарной составляющей управления может оставаться произвольной. Аналогично, после подстановки $x(t)$ в последнее уравнение из системы (10’) находим линейную форму для компонент осциллирующей части искомого управления

$$b_1\tilde{u}_1(t) + b_2\tilde{u}_2(t) = -\left(\xi_1(t)\alpha_1 + \xi_2(t)\alpha_2 + (\cos t - 1)(-\alpha_1 - 2\alpha_2)\right).$$

Заключение

Для класса линейных периодических систем управления с вырождением блоков среднего значения матрицы коэффициентов построено периодическое воздействие того же периода, что и сама система, переводящее систему в асинхронный режим, при котором замкнутая управлением система имеет сильно нерегулярное периодическое решение. Алгоритм проиллюстрирован примером.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Зубов, В. И.*** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 495 с.
2. ***Макаров, Е. К.*** Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск : Беларус. навука, 2012. – 407 с.
3. ***Малкин, И. Г.*** Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М.-Л. : ОГИЗ, 1949. – 244 с.
4. ***Massera, J. L.*** Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – V. 4, № 1. – P. 37–45.
5. ***Курцвейль, Я.*** О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
6. ***Еругин, Н. П.*** О периодических решениях дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин // Прикл. матем. и механика. – 1956. – Т. 20, вып.1. – С. 148–152.
7. ***Гайшун, И. В.*** Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И. В. Гайшун // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 8. – С. 684–686.
8. ***Грудо, Э. И.*** О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.
9. ***Борухов, В. Т.*** Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В. Т. Борухов // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 585–591.
10. ***Папалекси, Н. Д.*** Об одном случае параметрически связанных систем / Н. Д. Папалекси // Journ. Of Phys. Acad. Sc. USSR. – 1939. – Т. 1. – С. 373–379.
11. ***Пеннер, Д. И.*** Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия / Д. И. Пеннер, Я. Б. Дубошинский, Д. Б. Дубошинский // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С . 1065– 1066.
12. ***Деменчук, А. К.*** Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.
13. ***Деменчук, А. К.*** Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 31–34.
14. ***Деменчук, А. К.*** Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с невырожденным левым верхним диагональным блоком среднего значения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2022. – Т. 30, № 1, 2. – С. 22–29.
15. ***Хорн, Р.*** Матричный анализ / Р. Хорн , Ч. Джонсон. – М. : Наука, 1989. – 655 с.
16. ***Demenchuk, A. K.*** Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems / A. K. Demenchuk // Math. Bohemica. – 2001. – V. 126, № 1. – P. 221–228.
17. ***Деменчук, А. К.*** Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А. К. Деменчук // Труды Института математики.– 2019. – Т. 27, № 1, 2. – С. 23–28.

Поступила в редакцию 17.02.2024 г.
Контакты: demenchuk@im.bas-net.by (Деменчук Александр Константинович).

Demenchuk A. K. **SYNTHESIS OF AN ASYNCHRONOUS MODE IN A LINEAR PERIODIC CONTROL SYSTEM WITH A NON-DEGENERATE LOWER DIAGONAL BLOCK OF THE AVERAGING COEFFICIENT MATRIX**

A linear periodic control system with a constant matrix under control is considered. Program control is periodic, and the set of its frequencies is contained in the frequency module of the coefficient matrix. It is assumed that the control matrix has linearly dependent columns; the averaging of the coefficient matrix is reduced to a special form with a non-degenerate lower right diagonal block and the remaining trivial blocks. For the class of systems under consideration, sufficient conditions are given, under which the construction of a control action is carried out, transferring the system to an asynchronous mode.

Keywords: linear differential control system, strongly irregular periodic solution, asynchronous spectrum.