

УДК 535.361:535.317.1

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПУСКАНИЯ И РАДИУСА УЗКОГО ПУЧКА ИЗЛУЧЕНИЯ В БИНАРНОЙ МАРКОВСКОЙ СМЕСИ

**М. С. Носкова**

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В работе проводится сравнительный анализ результатов расчета пространственного распределения освещенности в бинарной марковской смеси аналитическим методом, основанным на малоугловом приближении, и методом численного моделирования Монте-Карло.*

*Расчеты, проведенные обоими методами, дают близкие в количественном отношении результаты для бинарных марковских смесей с разными оптическими параметрами, и демонстрируют одни и те же закономерности по сравнению с переносом излучения в эквивалентной однородной смеси.*

**Ключевые слова:** стохастический перенос излучения, бинарная марковская смесь, малоугловое приближение, численное моделирование, метод Монте-Карло.

### Введение

Перенос излучения в стохастических неоднородных рассеивающих средах – одно из актуальных направлений современной оптики, широко применяемое для решения научных и практических задач.

Основная цель теории стохастического переноса излучения – установить связь между статистическими характеристиками параметров среды и статистическими характеристиками полей излучения [1–9].

Распространенным вариантом стохастической среды является **случайно-неоднородная смесь (СНС)** – среда, состоящая из несмешивающихся компонент, с разными оптическими характеристиками [6, 7]. Линейные размеры участков пространства, занимаемых компонентами (хорды компонент), являются случайными величинами.

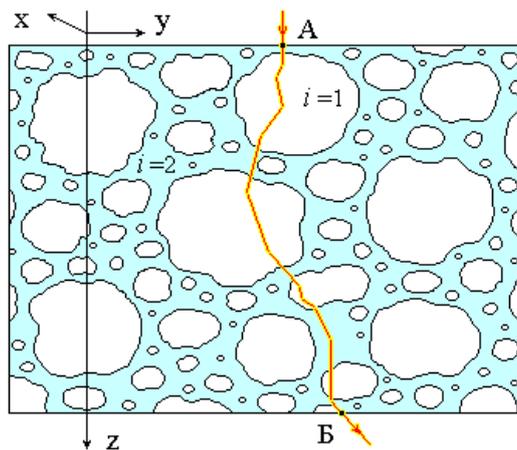


Рисунок 1 – Схематическое изображение разорванной облачности

В атмосферной оптике двухкомпонентной СНС является разорванная облачность (Рис. 1): пересекающий ее фотон (кривая АБ) проходит сквозь чередующиеся участки облаков (компонента  $i=1$ ) и межоблачного пространства (компонента  $i=2$ ). Внутренняя структура каждой из компонент считается однородной. Стохастичность задачи проявляется только в статистике распределения облачного поля, т. е. в вероятности присутствия в данной точке облака или ясного неба.

Другие примеры СНС показаны на рис. 2, где 1 – биологические ткани, пронизанные мелкими кровеносными сосудами; 2 – легочная ткань; 3 – бетонная защита ядерных реакторов; 4 – кипящая вода как теплоноситель в ядерных реакторах.

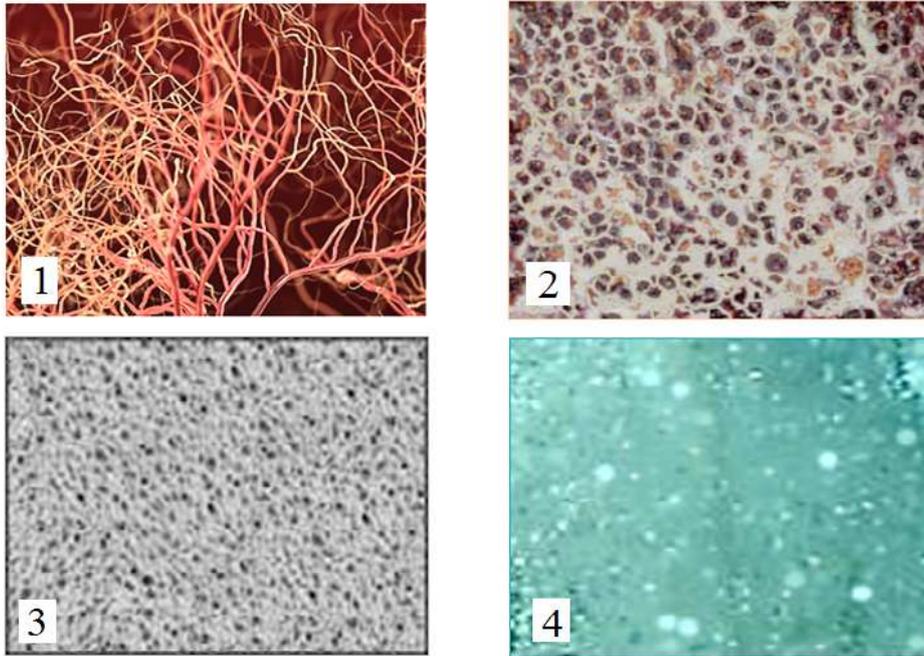


Рисунок 2 – Примеры случайно неоднородных смесей

При решении любой физической задачи наиболее ценным результатом является аналитическое решение, однако, строгие аналитические решения стохастического уравнения переноса с произвольной статистикой существуют лишь для некоторых частных случаев [6, 7, 10–12].

Поэтому большой интерес представляет разработка приближенных методов описания стохастического переноса, базирующиеся на аналитическом усреднении и зависящих от небольшого количества входных параметров.

#### Постановка задачи

Стационарное уравнение переноса излучения в среде имеет вид [1]:

$$\Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \Omega') f(\Omega \cdot \Omega', \mathbf{r}) d\Omega' + B(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1)$$

где  $I(\mathbf{r}, \Omega)$  – интенсивность излучения в точке  $\mathbf{r}$  в направлении, определяемом единичным вектором  $\Omega$ ,

$\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$  – оператор градиента,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – единичные векторы декартовой системы координат,  $\sigma(\mathbf{r})$  – показатель рассеяния,  $\varepsilon(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r})$  – показатель экстинкции,  $k(\mathbf{r})$  – показатель поглощения,

$f(\Omega \cdot \Omega', \mathbf{r})$  – индикатриса рассеяния, функция, описывающая вероятность изменения направления движения фотона из  $\Omega$  в  $\Omega'$  при однократном рассеянии,

$B(\mathbf{r}, \Omega)$  – функция источников.

Одна из распространенных моделей случайно-неоднородной смеси с произвольным размером неоднородностей – **бинарная марковская смесь** (далее БМС) – среда, состоящая из двух несмешивающихся веществ (компонент), случайным образом распределенных в пространстве, каждое из которых имеет свои оптические характеристики [12–15].

Чередование компонент 1 и 2 вдоль произвольной прямой, проходящей сквозь слой БМС, представляет собой Марковский дискретный случайный процесс. Линейные размеры областей пространства, занимаемых компонентами, – случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону:

$$\varphi_i(s_i) = \frac{1}{l_i} \exp\left(-\frac{s_i}{l_i}\right), \quad (2)$$

где  $\varphi_i(s_i)$  – функция плотности вероятности случайной величины  $s_i$ , характеризующей линейные размеры участков пространства, занимаемых  $i$ -й компонентой смеси вдоль направления распространения пучка ( $i$  – индекс, указывающий номер компоненты),  $l_i$  – среднее значение  $s_i$  (средние хорды компонент). Внутренняя структура каждой из компонент считается однородной.

В БМС уравнение переноса (1) превращается в систему двух связанных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon_1 p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{\sigma_1}{4\pi} \int_{4\pi} p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega') f_1(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' + p_1 B_1 - \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega)}{l_1} + \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega)}{l_2}, \\ \Omega \cdot \nabla p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon_2 p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{\sigma_2}{4\pi} \int_{4\pi} p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega') f_2(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' + p_2 B_2 - \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega)}{l_2} + \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega)}{l_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $I_i(\mathbf{r}, \Omega)$  – условное значение интенсивности в компоненте  $i$ ,

$\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  – соответственно показатели рассеяния и ослабления  $i$ -й компоненты,

$f_i(\Omega \cdot \Omega')$  – индикатриса рассеяния  $i$ -й компоненты,

$l_i$  – средние хорды компонент,

$p_i = \frac{l_i}{(l_1 + l_2)}$  – вероятность нахождения компоненты  $i$  в произвольной точке объема, занимаемого БМС,

$B_i(\mathbf{r}, \Omega)$  – функции источников.

Среднее значение интенсивности излучения в БМС определяется как

$$\langle I(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) + p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega). \quad (4)$$

Марковская модель позволяет создавать удобные для практического применения алгоритмы расчета усредненных характеристик излучения, используя небольшое число параметров.

В работах [13, 14] система (3) решалась аналитически в случае изотропной индикатрисы рассеяния. Однако многие природные среды, в том числе атмосферная облачность, имеют вытянутую индикатрису рассеяния, что позволяет применять к ним малоугловое приближение и метод преобразования Фурье [1–3]. В рамках данного приближения можно получить некоторые интегральные характеристики излучения в аналитическом виде [16–21], что дает возможность для анализа закономерностей переноса излучения в стохастических средах.

Необходимым элементом формирования физической модели является определение ее области применимости. В работе [22] проводится качественная оценка применимости модели БМС для описания стохастического переноса излучения. Показано, что фрактальная размерность БМС совпадает с фрактальной размерностью многих природных сред, что говорит о широкой области применимости данной модели.

Хотя малоугловое рассеяние само по себе с высокой степенью точности соответствует принципу причинности, лежащему в основе марковских процессов, полученные в его рамках нуждаются в дополнительной проверке.

**Цель настоящей работы** – оценить точность аналитического метода описания переноса излучения, основанного на малоугловом приближении [13–17] с помощью метода численного моделирования Монте-Карло.

### Результаты, полученные в рамках модели БМС

С помощью стандартных приближений малоугловой теории [1–3] в работах [16–20] получены аналитические выражения для пространственных моментов освещенности угловых моментов интенсивности.

Пусть узкий азимутально-симметричный пучок падает перпендикулярно плоской границе БМС, как показано на рис. 1. Ось  $z$  декартовой системы координат совпадает с осью пучка, плоскость  $x$   $y$  совпадает с границей БМС.

В этом случае пространственные моменты освещенности  $E(x, y, z)$  для однородной среды определяются следующим образом:

$$M_{nk}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^k E(x, y, z) dx dy, \quad (5)$$

$E(x, y, z) = \int_{4\pi} \Omega_z I(x, y, z, \Omega) d\Omega$  – освещенность в точке  $(x, y, z)$  на плоскости  $z = const$ .

Усредненное значение пространственных моментов для БМС

$$\langle M_{nk}(z) \rangle = p_1 M_{nk}^{(1)}(z) + p_2 M_{nk}^{(2)}(z), \quad (6)$$

где  $M_{nk}^{(i)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^k E_i(x, y, z) dx dy$  – средние значения пространственных моментов освещенности  $E_i(x, y, z) = \int_{4\pi} \Omega_z I_i(x, y, z, \Omega) d\Omega$  при условии, что точка  $(0, 0, z)$  находится в компоненте  $i$ .

Наибольший интерес представляют моменты первых порядков. Момент нулевого порядка  $\langle M_{00} \rangle$  определяет среднее значение энергии, переносимой узким пучком единичной мощности в среде через плоскость  $z = const$ , или средний коэффициент пропускания БМС:

$$K_B(z) = \langle M_{00}(z) \rangle. \quad (7)$$

Квадратные корни из отношения пространственных моментов освещенности второго порядка к нулевому моменту определяют усредненное значение радиуса пучка в плоскости  $z = const$ .

$$R_B(z) = \sqrt{\frac{\langle M_{20}(z) \rangle + \langle M_{02}(z) \rangle}{\langle M_{00}(z) \rangle}}. \quad (8)$$

Более подробно формулы для расчетов среднего коэффициента пропускания БМС и среднего радиуса узкого пучка излучения представлены в [21].

### Моделирование методом Монте-Карло

Метод Монте-Карло является универсальным для решения стохастических задач. В этой области значительные успехи достигнуты, например, при описании распространения солнечного излучения в кучевой облачности [23–28]. Тем не менее, для выявления основных закономерностей стохастического переноса необходимо проводить вычисления для большого числа реализаций статистики. Поэтому численные и аналитические методы при создании теории стохастического переноса должны дополнять друг друга.

Моделирование проводилось на основе методов, приведенных в [29].

БМС рассматривается как одномерная стохастическая среда, состоящая из чередующихся плоских слоев случайной толщины, занимаемых первой или второй компонентами. В области применимости малоуглового приближения, зависимость переноса излучения от размера неоднородностей в направлении, перпендикулярном оси пучка, минимальна, что и оправдывает переход к одномерной модели.

Излучение падает на плоскую поверхность среды вдоль ее нормали, ось  $z$  декартовой системы координат совпадает с осью пучка, плоскость  $x$   $y$  совпадает с границей БМС. Малоугловое рассеяние моделировалось с использованием аппроксимации Хензи-Гринштейна [30].

Пучек считается бесконечно узким и мононаправленным, координаты точки входа фотонов в БМС  $(0, 0, 0)$ , а начальное значение координат единичного вектора, определяющего направление движения,  $(0, 0, 1)$ .

Порядок чередования компонент и толщина слоев, занимаемых первой и второй компонентами смеси, разыгрывался для каждого фотона отдельно, по мере его прохождения сквозь слой среды. Данный метод дает высокую степень усредненности результатов.

Траектории фотонов в горизонтальном направлении ограничены условием:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 8H.$$

Количество фотонов, отсеянных данным условием, составляет менее 0,5%.

Коефіцієнт пропускання рассчитывался как отношение числа фотонов на выходе из слоя среды к числу фотонов на входе. Радиус пучка рассчитывается по координатам точек выхода фотонов из среды.

Алгоритм и процедура расчета коэффициента пропускання БМС может быть легко адаптирована для расчета коэффициентов пропускання стохастических сред с произвольной статистикой [22].

### Численные расчеты

Чтобы показать влияние стохастичности среды на перенос излучения, в работе производится также расчет коэффициента пропускання и радиуса пучка эквивалентной однородной смеси.

Эквивалентная однородная смесь – среда, в которой компоненты, составляющие БМС, не разделены, а перемешаны равномерно.

При расчетах использованы безразмерные оптические параметры:

$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2$  – средний коэффициент экстинкции,  $\tau = \langle \varepsilon \rangle z$  – оптическая глубина слоя,  $\Lambda_i = \sigma_i / \varepsilon_i$  – вероятности выживания фотона в единичном столкновении,  $\mu_i$  – средние косинусы углов рассеяния,  $\tilde{l}_i = \langle \varepsilon \rangle l_i$  – безразмерные средние хорды компонент,  $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / \langle \varepsilon \rangle$  – величины относительных флуктуаций показателей ослабления.

Каждое значение рассчитано для 100000 фотонов.

На рис. 3 и рис. 4 показаны результаты расчетов коэффициента пропускання  $K_B(\tau)$  и радиуса пучка  $R_B(z)$  в БМС с параметрами разорванной облачности, в которой компонентой-1 является облако, компонентой-2 – межоблачная среда. Межоблачные промежутки заполнены теми же частицами, что и облака, но со значительно меньшей концентрацией.

Оптические параметры разорванной облачности:

облако:  $\tilde{\varepsilon}_1 = 1.95$ ,  $\Lambda_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 0.95$ ,

межоблачная среда:  $\tilde{\varepsilon}_2 = 0.05$ ,  $\Lambda_2 = 0.9$ ,  $\mu_2 = 0.95$ .

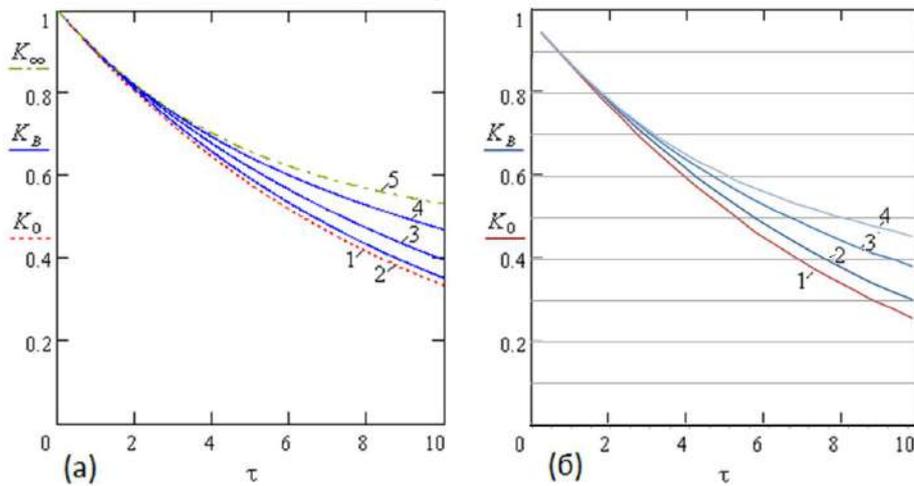


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента пропускання от оптической глубины слоя в разорванной облачности.

На рис. 3 результаты расчетов коэффициента пропускания разорванной облачности (а) – аналитическое решение (7); (б) – метод Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $K_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси (для разорванной облачности), оно же предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 на (а) и (б) представляют  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 на (а) это  $K_\infty(\tau)$  – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Физически этот предел соответствует случаю, когда половина неба занята мощным облаком, а вторая половина свободна. В данной статье эта ситуация методом Монте-Карло не рассчитывалась.

Оба метода расчета дают количественно близкие результаты и показывают, что коэффициент пропускания разорванной облачности заметно превышает коэффициент пропускания эквивалентной однородной смеси. Это соответствует тому факту, что для фотона, пролетающего сквозь стохастическую смесь, вероятность испытать столкновение с частицей и при этом поглотиться или рассеяться всегда ниже, чем в однородной смеси.

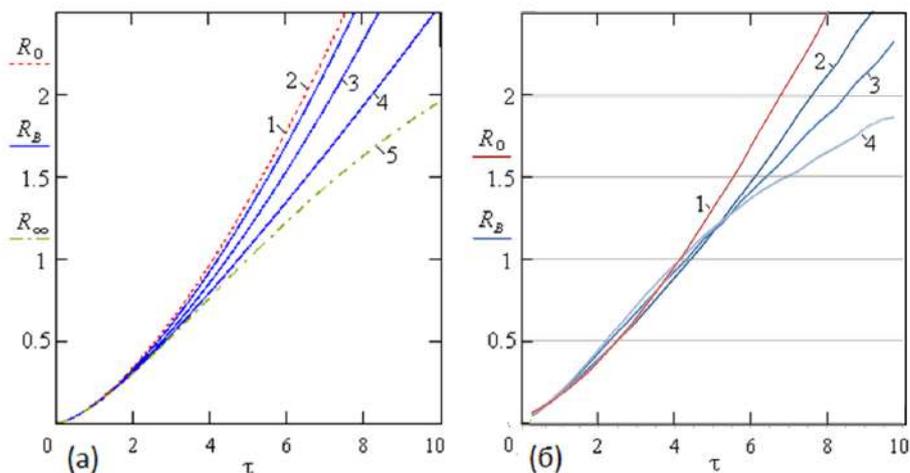


Рисунок 4 – Зависимость радиуса пучка излучения от оптической глубины слоя в разорванной облачности.

На рис. 4 показаны результаты расчетов радиуса пучка излучения в разорванной облачности: (а) – аналитическое решение (8); (б) – расчет методом Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $R_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси соответствующее разорванной облачности, т. е. предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 представляют  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 представляет  $R_\infty(\tau)$  – предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Методом Монте-Карло не рассчитывалось.

Аналитические расчеты на рис. 4 (а) показывают, что в БМС модели разорванной облачности радиус пучка заметно меньше, чем в соответствующей эквивалентной однородной смеси.

Расчеты по методу Монте-Карло на рис. 4 (б) дают более сложную картину на оптических глубинах меньших  $\tau = 5$ , но при  $\tau > 5$  радиус пучка в БМС демонстрирует такую же зависимость, что и в аналитической модели на рис. 4 (а).

Оба метода расчета показывают, что с ростом оптической глубины радиус пучка в разорванной облачности заметно меньше, чем в эквивалентной однородной смеси. Этот результат также подтверждает, что в стохастической смеси рассеянных фотонов меньше, чем в эквивалентной однородной смеси, и они реже испытывают столкновения с рассеивающими частицами.

На рис. 5 и рис. 6 показаны результаты расчетов коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  и радиуса пучка  $R_B(z)$  в модельной БМС, в которой компонента-1 – оптически плотная и сильнопоглощающая, компонента-2 – разреженная и сильнорассеивающая. Подобными оптическими параметрами могут обладать облака дыма или вулканические облака [8].

Оптические параметры дымовой облачности:

облака дыма:  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.6$ ,  $\Lambda_1 = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0.99$ ;

междоблачная среда:  $\tilde{\epsilon}_2 = 0.4$ ,  $\Lambda_2 = 0.9$ ,  $\mu_2 = 0.9$ .

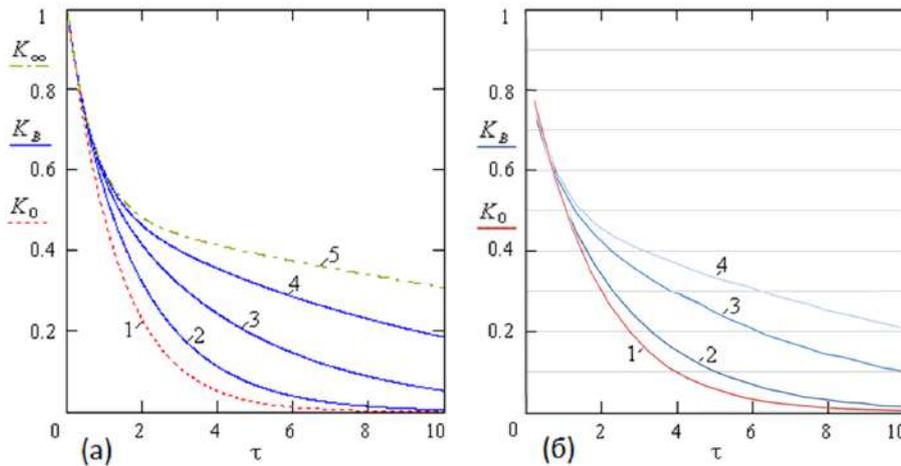


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента пропускания от оптической глубины слоя в дымовой облачности

На рис. 5 показаны результаты расчетов коэффициента пропускания дымовой облачности (а) – аналитическое решение (7); (б) – метод Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $K_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси (для дымовой облачности), – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 на (а) и (б) представляют  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 на (а) это  $K_\infty(\tau)$  – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Методом Монте-Карло не рассчитывалось.

Оба метода расчета показывают, что коэффициент пропускания дымовой облачности в несколько раз превышает коэффициент пропускания соответствующей эквивалентной однородной смеси, и дают количественно близкие результаты.

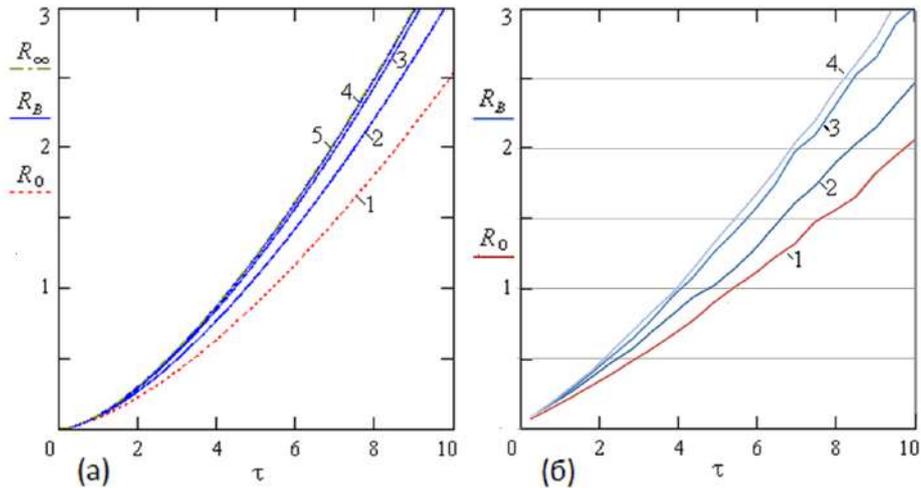


Рисунок 6 – Зависимость радиуса пучка излучения от оптической глубины слоя в дымовой облачности

На рис. 6 показаны результаты расчетов радиуса пучка излучения в дымовой облачности: (а) – аналитическое решение (8); (б) – метод Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $R_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси, – значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 соответственно  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$ .

Кривая 5 представляет  $R_\infty(\tau)$  – предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Методом Монте-Карло не рассчитывалось.

Результаты расчетов, проведенных как аналитическим методом, так и методом Монте-Карло показывают, что средний радиус пучка излучения в дымовой облачности значительно превышает средний радиус пучка излучения в соответствующей эквивалентной однородной смеси для всех значений оптической глубины слоя.

Это объясняется тем, что в компоненте-1 (дымовые облака) оптически плотной и сильнопоглощающей рассеивается небольшое количество фотонов, да и те быстро поглощаются, не успев перейти в разреженную компоненту-2. Таким образом, подавляющее большинство рассеянных фотонов в данной БМС происходит из компоненты-2 (межоблачная среда), разреженной и сильно рассеивающей.

### Заключение

Результаты расчетов методом Монте-Карло, приведенные на рис. 3–6 показывают, что аналитический метод, основанный на малоугловом приближении, дает вполне адекватное описание переноса излучения в стохастической среде, соответствующей параметрам бинарной марковской смеси.

Предложенный подход позволяет быстро рассчитывать пространственно-угловое распределение интенсивности в БМС и передаточные характеристики БМС, дает возможность исследовать их зависимость от оптических параметров БМС и размера средних хорд компонент.

Таким образом, малоугловая модель БМС, являясь сравнительно простой и наглядной, позволяет учитывать ряд эффектов, вызванных стохастичностью среды, и может служить основой для разработки алгоритмов описания переноса излучения в средах с произвольным уровнем пространственных флуктуаций.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Зеге, Э. П.* Перенос изображения в рассеивающей среде / Э. П. Зеге, А. П. Иванов, И. Л. Кацев. – Мн. : Наука и техника, 1985. – 327 с.
2. *Исимару, А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах : в 2 т. / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. – Т. 1. – 280 с.
3. *Показеев, К. В.* Океанология. Оптика океана / К. В. Показеев, Т. О. Чаплина. – М. : Юрайт. 2019. – 270 с.
4. *Малинка, А. В.* Учет влияния атмосферы при интерпретации данных спутниковых и наземных оптических измерений / А. В. Малинка [и др.] // ЖПС. – 2016. – Т. 83, № 5. – С. 698–707.
5. *Зуев, В. Е.* Оптика атмосферы и климат / В. Е. Зуев, Г. А. Титов. – Томск : Изд-во «Спектр» ИОА, 1996. – 271 с.
6. *Валентюк, А. Н.* Оптическое изображение при дистанционном наблюдении / А. Н. Валентюк, К. Г. Предко. – Мн. : Наука и техника, 1991. – 359 с.
7. *Pomraning, G. C.* Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures / G. C. Pomraning. – World Scientific Publishing, Singapore, 1991. – 235 p.
8. *Филей, А. А.* Построение моделей оптических параметров вулканических облаков для задач дистанционного зондирования Земли из космоса / А. А. Филей // Оптика атмосферы и океана. – 2020. – Т. 33, № 2. – С. 127–134.
9. *Byvank, T.* Design of experiments to spectroscopically characterize radiation flow in stochastic media / T. Byvank [at al.] // Phys. Plasmas. – 2024. – Vol. 31, Issue 4. – Access mode: <https://doi.org/10.1063/5.0198139>. – Date of access: 01.06.2024.
10. *Valentyuk, A. N.* Stochastic radiative transfer and causality condition / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1995. – Vol. 53, № 6. – P. 693–704.
11. *Valentyuk, A. N.* A functional description of stochastic radiative transfer / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1996. – Vol. 56. – P. 447–464.
12. *Valentyuk, A. N.* Stochastic radiative transfer in M-component markovian mixtures / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1998. – Vol. 60, № 6. – P. 1069–1086.
13. *Помранинг, Г. С.* Асимптотические уравнения переноса излучения в атмосфере с частичной облачностью / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1996. – Т. 9, № 1. – С. 14–29.
14. *Помранинг, Г. С.* Взаимодействия облако-радиация: модель Титова и другие модели / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 3. – С. 215–221.
15. *Kassianov, E. I.* Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future / E. I. Kassianov, D. Veron. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2011. – V. 112, № 5. – P. 566–576.
16. *Noskova, M.* Stochastic laser-beam transfer through a binary Markovian mixture / M. Noskova, A. Valentyuk. // Appl. Opt. – 1997. – Vol. 36, № 30. – P. 325–331.
17. *Валентюк, А. Н.* Угловая структура лазерного излучения в бинарной марковской смеси / А. Н. Валентюк, М. С. Носкова // ЖПС. – 1999. – Т. 66, № 1. – С. 36–42.
18. *Носкова, М. С.* Оптическая передаточная функция бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // ЖПС. – 2004. – Т. 71, № 2. – С. 198–203.
19. *Носкова, М. С.* Итерационное решение задачи определения оптической передаточной функции бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // Оптический журнал. – 2004. – Т. 71, № 9. – С. 16–19.
20. *Noskova, M. S.* Small angle model of radiative transfer in a binary markovian mixture / M. S. Noskova // Twelfth Joint International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics / Atmospheric Physics, Tomsk, Russia, 27-30 June 2005. / Institute of Atmospheric Optics SB RAS; ed. by G. G. Matvienko, G. A. Zherebtsov, Proc. of SPIE Vol. 6160, 2006. – P. 616016-1 – 616016-7.

20. **Носкова, М. С.** Аналитические решения уравнения переноса излучения в бинарной марковской смеси в малоугловом приближении / М. С. Носкова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2022. – Т. 60, № 2. – С. 46–57.
21. **Носкова, М. С.** Бинарная марковская смесь как модель стохастической среды / М. С. Носкова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2024. – Т. 63, № 1. – С. 28–36.
22. **Каргин, Б. А.** Имитационное моделирование кучевой облачности для исследования процессов переноса солнечной радиации в атмосфере методом Монте-Карло / Б. А. Каргин, С. М. Пригарин // Оптика атмосферы и океана. – 1994. – Т. 7, № 9. – С. 1275–1287.
23. **Zuev, V. E.** Radiative transfer in cloud fields with random geometry / V. E. Zuev, G. A. Titov // – J. Atmos. Sci. – 1995. – Vol. 52. – P. 176–190.
24. **Титов, Г. А.** Радиационные эффекты неоднородных облаков / Г. А. Титов, Е. И. Касьянов // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 10. – С. 911–921.
25. **Kassianov, E.** Stochastic radiative transfer in multilayer broken clouds. Part I: Markovian approach / E. Kassianov // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2003. – Vol. 77, № 4. – P. 373–393.
26. **Kassianov, E.** Stochastic radiative transfer in multilayer broken clouds. Part II: validation test / E. Kassianov [et al.] // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2003. – Vol. 77, № 4. – P. 373–393.
27. **Kassianov, E. I.** Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future / E. I. Kassianov, D. Veron. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2011. – Vol. 112, № 5. – P. 566–576.
28. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Г. И. Марчук [и др.]; под общ. ред. Г. И. Марчука. – М. : Наука, 1976. – 216 с.
29. **Букатый, В. И.** Пространственное и угловое распределение светового поля в ансамбле частиц с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния / В. И. Букатый, Т. К. Кронберг, Д. В. Михеев // Оптика атмосферы и океана. – 2001. – Т. 14, № 3. – С. 230–232.

Поступила в редакцию 06.06.2024 г.

Контакты: noskova@msu.by (Носкова Марина Сергеевна).

**Noskova M. S. ESTIMATION OF THE ACCURACY OF CALCULATING THE TRANSMITTANCE COEFFICIENT AND RADIUS OF A NARROW RADIATION BEAM IN A BINARY MARKOV MIXTURE**

*The work provides a comparative analysis of the results of calculating the spatial distribution of radiation in a binary Markov mixture using the analytical method based on a small-angle approximation and the Monte Carlo numerical simulation method.*

*The calculations carried out by both methods give quantitatively similar results for binary Markov mixtures with different optical parameters, and demonstrate the same patterns compared to radiative transfer in an equivalent homogeneous mixture.*

**Keywords:** stochastic radiative transfer, binary Markov mixture, small-angle approximation, numerical simulation, Monte Carlo method.