УДК 511.42

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ДЕЛИМОСТЬ ДИСКРИМИНАНТОВ НА БОЛЬШУЮ СТЕПЕНЬ ПРОСТОГО ЧИСЛА

О. Н. Кемеш
кандидат физико-математических наук
Белорусский государственный аграрный технический университет

И. М. Морозова
кандидат физико-математических наук, доцент
Военная академия Республики Беларусь

Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. В. Шамукова
кандидат физико-математических наук, доцент
Военная академия Республики Беларусь

В данной статье дается обзор основных результатов, полученных ранее при решении проблем оценки количества многочленов с заданной диофантовой структурой, а также предложен метод, позволяющий получить точную оценку количества полиномов при всех значениях параметра v.

Ключевые слова: Мера Лебега, мера Хаара, размерность Хаусдорфа, диофантовы приближения, дискриминанты целочисленных полиномов, *p*-адические числа.

Введение

Около двух веков назад Дирихле [1] доказал теорему, в которой получил существенное улучшение, полученных ранее результатов, при замене действительных чисел рациональными числами.

Теорема Дирихле. Для любого $x \in \mathbb{R}$ и натурального числа $Q > 1$ всегда существуют целые числа p и q, $1 \le q \le Q$, такие, что

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \le q^{-1}Q^{-1}. \qquad (1)$$

Неравенство (1) усиливалось и обобщалось во многих статьях и монографиях [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Область математики, связанная с неравенством (1), получила название теория диофантовых приближений.

Преобразовав (1), получаем, что неравенство

$$|qx - p| < q^{-1},\ 1 \le q \le Q \qquad (2)$$

имеет бесконечное число решений для любого x из интервала $I = [a,\ b]$ в целых p и натуральных числах q, где в (2) под знаком модуля находится полином $qx - p$ первой степени.

Сформулируем несколько задач, связанных с обобщением неравенства (2) на полиномы степени $deg\, P = n$ и высоты $H = H(P) = max|a_i|$, $0 \leq i \leq n$ вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i \leq n. \qquad (3)$$

Существует простой метод, названный принципом ящиков Дирихле, позволяющий обобщить неравенство (2) на полиномы произвольной степени.

Далее $c_1 = c_1(n)$, $c_2, \ldots$ величины, зависящие только от n и не зависящие от H и Q. Обозначим μ_1 и μ_2 меру Лебега в $\mathbb{R}$ и μ_2 меру Хаара в $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, а $dim\, B$ – размерность Хаусдорфа множества $B \subset \mathbb{R}$. Для $x > 0$ введем монотонно убывающую функцию $\psi(x) > 0$. Обозначим $\mathcal{L}_n(\Psi)$ – множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах (3).

При $\Psi_1(H) = H^{-w}$, $w > 3n - 1$ К. Малер [7] доказал, что $\mu_1\mathcal{L}_n(\Psi_1) = 0$ и предложил (гипотеза Малера), что $\mu_1\mathcal{L}_n(\Psi_2) = 0$, $\Psi_2(H) = H^{-w_1}$ и $w_1 > 1$.

Теорема 1. (Спринджук [2, 8]). Гипотеза Малера справедлива.

Ровно 100 лет назад А. Я. Хинчин [9] доказал, что верно следующее утверждение.

Теорема 2. Верно равенство

$$\mu_1\mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ b - a, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = 0. \end{cases}$$

В конце XX века В. И. Берник [5] и В. В. Бересневич [10] обобщили и усилили теоремы 1 и 2.

Теорема 3. Справедливы равенства

$$\mu_1\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1 I, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Несколько ранее А. Бейкер и В. Шмидт [11] и В. Н. Берник [4] нашли точное значение размерности Хаусдорфа множества $M_n(w)$ тех $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-v},\ v > n$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$

Теорема 4. Размерность Хаусдорфа множества $\ _n(v)$ равна $dim\ \ _n(v) = \frac{n+1}{v+1}$.

Результаты, аналогичные теоремам 1–4, были получены для поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ [3, 12], а также в поле формальных степенных рядов.

Методы, разработанные при доказательстве указанных выше результатов, оказались полезными для решения ряда прикладных задач [13, 14]. В последние годы стали популярными задачи, по оценкам сверху и снизу количества полиномов заданной степени и высоты, у которых производные в корнях полиномов их дискриминанты и результанты лежат в указанных заранее границах [15], [16], [17]. Следует отметить разнообразие применяемых при решении таких задач методов анализа, алгебры, геометрии чисел, теории вероятностей и теории динамических систем.

Основная часть

В данной статье мы исследуем величины дискриминантов целочисленных полиномов, а также выясняем, на какую степень простого числа могут делиться дискриминанты.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни $P(x)$ как действительные, так и комплексные. В некоторых задачах принципиально важно знать, является ли корень α_i действительным алгебраическим числом или $\alpha_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

При исследовании структуры множества решений неравенства $|P(x)| < H^{-w},\ w > 0$ важно выделить как количество интервалов $\sigma(P)$, так и размеры этих интервалов.

Обозначим через $s(\alpha_i)$ множество тех x, для которых корень α_i является ближайшим корнем к x. Удобно положить $i = 1$.

Лемма 1. Пусть α_i – ближайший к x корень $P(x)$. Тогда

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)|\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}; \tag{4}$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} \min_{2 \le j \le n} \left(|P(x)|\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}(|\alpha - \alpha_2| \cdots |\alpha_1 - \alpha_j|)^{\frac{1}{j}}\right). \tag{5}$$

Приведенные в (4), (5) оценки являются точными в том смысле, что всегда можно указать интервал $1 \le j \le n$, для которого выполняется неравенство, противоположное (4), (5). Это доказано в [17]. В [18] показано, что оценки длин интервалов $|x - \alpha_1|$можно получить через величины дискриминантов $P(x)$.

Если применить лемму 1 к неравенству $|P(x)| < H^{-w}$, то становится ясно, что множество решений неравенства можно покрыть объединением интервалов, содержащих корни $P(x)$.

Поэтому первые продвижения в проблеме Малера были связаны с оценками сверху для количества полиномов с малыми значениями модулей производных и детерминантов $P(x)$ [15, 19].

Рассмотрим задачи диофантовых приближений в $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел.

Для $\alpha_i \in \mathbb{Q}_p$ множество

$$K_i = K_i(w,\ p^{-k_i}) = \{w \in \mathbb{Q}_p : |w - \alpha_i|_p < p^{-k_i},\ k_i \in \mathbb{Z}\} \qquad (6)$$

будем называть цилиндром в $\mathbb{Q}_p$. Как и при определении меры Лебега μ_1 в R введем для любого множества $B_1 \subset \mathbb{Q}_p$ покрытие B_1 цилиндрами Kмеры $\mu_2 = p^{-k}$. Возьмем множество

$$B_2 = inf \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

по всем покрытиям B_1.

Величину B_2назовем мерой Хаара μ_2 множества B_1. Из (6) следует, что каждую точку цилиндра можно рассматривать как его центр, и если два цилиндра пересекаются, то один из них содержит второй.

Нетрудно доказать, используя принципов ящика Дирихле [3, 6], что точная верхняя грань $v_1 > 0$, для которых существует бесконечно много векторов $\overline{q} = (q_0,\ q_1,\ \dots, q_n)$, удовлетворяющих неравенству

$$|q_n w^n + \ldots + q_1 w + q_0|_p < \max_{0 \le i \le n} |q_i|^{-v_1}.$$

Не менее $n + 1$ для любого n. Множество неприводимых примитивных полиномов с целыми рациональными числами, $a_0,\ a_2, \dots, a_n$, удовлетворяющими неравенству

$$max(|a_0|;\ |a_1|;\ \dots; |a_{n-1}|) \le a_n = Q.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n(Q)$. Корни полиномов $P(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$ принадлежат алгебраическому замыканию $\overline{\mathbb{Q}}_p$ поля $\mathbb{Q}_p$, на которые мы продолжим нормирование $|\dots|_p$ как в §6.1 как в [3, 6] и будем обозначать $|w|_p$ для всех $w \in \mathbb{Q}_p$.

Приведем несколько лемм.

Лемма 2 [3, 6]. Для всех корней γ_i полиномов $P(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$ справедливы неравенства $|\gamma_i|_p \le p$.

Корни $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ полиномов $P(w)$ упорядочим следующим образом

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \le |\gamma_1 - \gamma_3|_p \le \ldots \le |\gamma_1 - \gamma_n|_p\,.$$

Через $S(\gamma_i)$ будем обозначать множество $w \in \overline{\mathbb{Q}}_p$, для которых

$$\min_{1 \le k \le n} |w - \gamma_k|_p = |w - \gamma_i|\,,$$

и далее полагаем, что $i = 1$.

Для полинома $P(w)$ с высотой $\frac{Q}{2} < H = H(P) \le Q$ и достаточно малого числа $\varepsilon_1 > 0$ введем натуральное число T и действительные числа ρ_i из равенств

$$T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1,\ |\gamma_1 - \gamma_i|_p = Q^{-\rho_i}, 2 \le i \le n.$$

Определим целые числа $l_2, \dots, l_n$ из неравенств

$$\frac{l_i-1}{T} \leq \rho_i < \frac{l_i}{T}.$$

Из леммы 2 следует, что $\frac{l_i}{T} \geq -1$ [3,6], для достаточно больших Q. Положим

$$P_i = T^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} l_{i+1}.$$

Используя дискриминанты полиномов $\mathcal{P}(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$, несложно показать, что справедлива

Лемма 3 [3, 6]. Количество векторов $\bar{l} = (l_2, \dots, l_n)$ зависит только от ε_1 и n, но не зависит от H и Q. Множество полиномов $P(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\bar{l}$ будет обозначать $\mathcal{P}_n(Q,\ \bar{l})$.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{P}_n(w) \in \mathcal{P}_n(Q),\ w \in S(\gamma_1)$.

Тогда

$$|w-\gamma_1|_p \leq |P(w)|_p |P^{/}(\gamma_1)|_p^{-1}$$

$$|w-\gamma_1|_p \leq \min_{2\leq j\leq n} \left(|P(w)|_p |P^{/}(\gamma_1)|_p^{-1} |\gamma_1-\gamma_2|_p \cdots |\gamma_1-\gamma_j|_p \right)^{\frac{1}{j}}.$$

Лемма 5. Пусть полиномы. И $P_1(w)$ и $P_2(w)$ из $\mathcal{P}_n(Q)$ степени не более n и высоты не более Q не имеют общих корней в $\overline{\mathbb{Q}}_p$ и на цилиндре $K,\ \mu_2 K = Q^{-\eta}$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{w\in K}\left(|P_1(w)|_p,\ |P_2(w)|_p\right) < Q^{-\tau_1},\ \tau_1 > 0.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau_1 + 2\sum_{s=1}^{n} \max(\tau_1 - s\eta,\ 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 5 доказана для $s = 1$в [3, 8], а при произвольном s доказана в [19].

Каждое ненулевое рациональное число $\frac{a}{b}$ $(a,b) = 1$ можно записать в виде $\frac{a_1 p^m}{b}$, $(a_1,\ p_1) = 1$ при некотором $m \in \mathbb{Z}$. Определим p-адическую норму числа

$$|a|_p = \begin{cases} 0, & \text{если m=0,} \\ p^{-m}, & \text{если m} \neq 0. \end{cases}$$

Для любых a и b справедливо равенство $|ab|_p = |a_1|_p |b_1|_p$, неравенство

$$|a+b|_p \leq \max\left(|a|_p,\ |b|_p\right) \tag{7}$$

и если $|a|_p \neq |b|_p$, то

$$|a+b|_p = \max\left(|a|_p,\ |b|_p\right) \tag{8}$$

Таким образом, введенную норму называют неархимедовой в отличие от архимедовой нормы $|a|$ – модуль a. Отметим справедливость неравенства

$$|a|^{-1} \leq |a|_p.$$

Пополнение поля рациональных чисел по архимедовой норме приводит к полю действительных чисел R, а по неархимедовой норме (7), (8) – к полю p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Каждый элемент $w \in \mathbb{Q}_p$ может быть единственным образом записан в виде

$$w = \sum_{r=t}^{\infty} d_k p^r,\ t \in \mathbb{Z},\ 0 \leq d_k \leq p-1.$$

При неотрицательном r имеем $|w|_p \leq 1$ и число w называется целыми p-адическим числом. Множество целых p-адических чисел образует кольцо.

Для многочлена $P(w)$ с целыми коэффициентами a_j и корнями $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ обозначим через $D(P)$ величину

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left|\alpha_i - \alpha_j\right|^2,$$

которую назовем дискриминантом полинома $P(w)$.

В действительном случае дискриминант – это целое число, равное 0, тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни.

Для $0 \leq v \leq 2$ обозначим через

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(x) \in Z[x]: 1 \leq |D(P)| < Q^{2n-2} Q^{-2v}\}. \quad (9)$$

В [16] доказано, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \gg Q^{n+1} Q^{2n-2-2v} - \frac{n+2}{n} v,\ 0 \leq v \leq n-1. \quad (10)$$

В [20], что для любого $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ верно неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) < Q^{4-\frac{5}{3}v},\ 0 \leq v \leq 2.$$

Таким образом при $0 \leq v \leq 2$

$$cQ^{4-\frac{5}{3}v} < \#\mathcal{P}_3(Q, v) < Q^{4-\frac{5}{3}v+\varepsilon}.$$

Верхняя оценка в (9, 10) была доказана методами метрической теории диофантовых приближений.

В данной статье мы обобщаем верхнюю оценку в (10) на поле p-адических чисел.

Теорема 6. Для любого $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v_1) < Q^{4-\frac{5}{3}v_1+\varepsilon},\ 0 \leq v_1 \leq 2, \quad (11)$$

где множество $\mathcal{P}_3(Q, v_1)$ состоит из полиномов третьей степени, для которых верно неравенство

$$|D(P)|_p < Q_n^4 \prod (\gamma_i - \gamma_j)^{\frac{1}{p}}. \quad (12)$$

Доказательство теоремы.

Случай больших v_i.

Покроем цилиндр $K \subset Q_p$ объединением цилиндров

$$M = \cup_{i=1}^{S} K_i,\ \mu_2 K_i = Q^{-\rho_2},\ S = Q^{\rho_2}.$$

Три корня $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ полинома $P_3(\varepsilon)$ упорядочим следующим образом:

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p = Q^{-\rho_2},\ |\gamma_1 - \gamma_3|_p = Q^{-\rho_3},\ |\gamma_2 - \gamma_3|_p = Q^{-\rho_3}, v_1 = \rho_2 + 2\rho_3, \quad (13)$$

при необходимости корни меняем местами. Если выполняется неравенство, противоположное (13), то существуют тройки $\overline{\gamma_1} = (\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \gamma_{i_3})$; $\overline{\gamma_2} = (\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \gamma_{j_3})$, $i \neq j$ и цилиндр K_i, которому принадлежит не менее $T_1 = Q^{\frac{\varepsilon}{2}}$ троек $\overline{\gamma_1}$, $\overline{\gamma_2}$ с условием

$$\left|\gamma_{i_1} - \gamma_{j_1}\right|_p < Q^{-\ 4+\frac{5}{3}v-\ \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (14)$$

Неравенство (14) по лемме выполняется для некоторых неприводимых полиномов $P_1(w),\ P_2(w)$. Рассмотрим результант полиномов

$$\mathrm{Res}(P_1,\ P_2) = a_{3i}^3 a_{3j}^3\ \prod\left|\gamma_{i_s} - \gamma_{j_t}\right|_p \quad (15)$$

в поле p-адических чисел.

Так как

$$0 \neq \mathrm{Res}(P_1,\ P_2) \in \mathbb{Z},\ \ \left|a_{3i}^3\right|_p \leq 1,\ \left|a_{3j}^3\right| \ \leq 1,$$
$$|\gamma_{is} - \gamma_{it}|_p \leq Q^{-\ \rho_2},\ max(s,t) \leq 2,$$
$$|\gamma_{is} - \gamma_{it}|_p < Q^{-\ \rho_3},\ s = 3 \text{ или } t=3,$$

то (15) можно записать в виде

$$|D(P)|_p = \left|Q_4^3\right|_p |\gamma_1 - \gamma_2|_p^2 = |\gamma_1 - \gamma_3|_p^2 < Q^{-2w},\ 0 \leq w \leq 2.$$

Заметим, что полиномы $P(w)$ на данном этапе можно считать неприводимыми, так как количество неприводимых полиномов можно оценить:

$$\#\mathcal{P}_{red}(w) \in \mathcal{P}_3(Q) \ll Q^{3n}.$$

Для доказательства теоремы 6 проведем классификацию корней из алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}}_p$ поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Пусть выполнено неравенство, противоположное формулировке теоремы 6. Представим цилиндр K в виде объединения цилиндров K_i с мерой Хаара μ_2, равной $Q^{-l_2 T^{-1}}$. Пусть на одном из таких цилиндров J_i окажется не менее $Q^{4-\frac{5}{3}w+\frac{\varepsilon}{2}}$ полиномов $P(\omega)$ с дискриминантами $D(P)$ такими, что $|D(P)|_p < c_{17} Q^{-2w}$. Разложим эти полиномы на цилиндре J_1 в ряд Тейлора в окрестности корня γ_1. В итоге получим не менее $Q^{4-\frac{5}{3}w-l_2T^{-1}+\frac{\varepsilon}{2}}$ полиномов $P(\omega)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|P_i(\omega)|_p < c_{18} Q^{-2p_1-p_3-\frac{\varepsilon}{4}}. \quad (16)$$

Применим к полиномам (16) принцип ящиков Дирихле, чтобы уменьшить степени $P_i(\omega)$ до второй и первой соответственно. Если среди новых полиномов окажутся полиномы $R_j(\omega)$ без общих корней, то применим к ним следующую лемму.

Лемма 6. Пусть целочисленные полиномы $P_i(\omega)$, $i = 1,2$, не имеют в цилиндре K меры Хаара $Q^{-\eta}$, $\eta > 0$ общих корней. Пусть

$$\max_{\omega \in K}\left(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p\right) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 > 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\tau_1 + 2\sum_{k=1}^{n} \max(\tau_1 - k\eta, 0) < 2n + \delta.$$

Для неприводимых полиномов $R_j(\omega)$ лемма приводит к противоречию. Приводимые полиномы $R_j(\omega)$ второй степени разложим на линейные множители

$$R_j(\omega) = (a_1\omega + b_1)(a_2\omega + b_2).$$

Поскольку мы можем точно оценить как сверху, так и снизу меры множеств $\omega \in \mathbb{Q}_p$, для которого верны неравенства $|a_i\omega + b_i|_p < Q^{-w_i}, w_i > 0, i = 1,2,$ то получим для $R_j(\omega)$ неравенства, которые приведут к противоречию.

Заключение

Доказанная теорема улучшила результаты, полученные ранее при исследовании проблемы диофантовых приближений на поле *p*-адических чисел, а методика доказательства имеет перспективы для дальнейшего развития и получения более сильных оценок.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Нестеренко, Ю. В.*** Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю. В. Нестеренко. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 22 с.
2. ***Хинчин, А. Я.*** Избранные труды по теории чисел / А. Я. Хинчин. – М. : МЦНМО, 2006. – 260 с.
3. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. ***Берник, В. И.*** Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Т. 42, № 3. – С. 219–253.
5. ***Берник, В.*** О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.
6. ***Bernik, V. I.*** Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics, 137, 1999.– 186 p.
7. ***Mahler, K.*** Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol.106, № 1. – P. 131–139.
8. ***Спринджук, В. Г.*** Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук. // Изв. АН СССР. Сер. Мат., 29. – 1965. – № 2. – С. 379–436.
9. ***Khintchine, A.*** Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 93, № 1–2. – P. 115–125.
10. ***Beresnevich, V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 50, № 2. – P. 97–112.
11. ***Baker, A.*** Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. (3). – 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.
12. ***Beresnevich, V.*** Bernik, V. I., Kovalevskaya E.I. On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers / V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya // Journal of Number Theory. – 2005. – Vol. 111. – P. 33–36.

13. ***Пташник, Б. И.*** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – Киев : Наукова думка, 1984. – 264 с.

14. ***Beresnevich, V.*** Number theory meets wireless communications: an introduction for dummies like us / V. Beresnevich, S. Velani // Springer International Publishing. – 2020. – P. 1–67.

15. ***Васильев, Д. В.*** Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне / Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, вып. 2. – С. 47–53.

16. ***Beresnevich, V.*** The distribution of close conjugate algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Compos. Math. – 2010. – Vol. 146, № 5. – P. 1165–1179.

17. ***Пантелеева, Ж. И.*** Количество алгебраических чисел с малой производной минимального многочлена / Ж. И. Пантелеева // Вестник МГУ имени А. А. Кулешова. – 2022. – № 2 (60). – С. 33–38.

18. ***Beresnevich, V. V.*** Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze // Advances in Mathematics, 298 – 2016. – P. 393–412.

19. ***Кудин, А. С.*** Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне / А. С. Кудин // Вести НАН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 2014. – № 4. – С. 112–115.

20. ***Badziahin, D.*** Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve (to arXiv: 2403.17685v2).

Поступила в редакцию 17.06.2024 г.

Контакты: kemesh.oksana@gmail.com (Кемеш Оксана Николаевна), inna.morozova@tut.by (Морозова Инна Михайловна), sakovichnv@tut.by (Сакович Наталья Владимировна), shamukova_n@mail.ru (Шамукова Наталья Валентиновна).

Kemesh O. N., Morozova I. M., Sakovich N. V., Shamukova N. V. **DIOPHANTINE APPROXIMATIONS AND DIVISION OF DISCRIMINANTS BY A LARGE POWER OF A PRIME NUMBER**

The article provides an overview of the main results obtained earlier in solving the problems of estimating the number of polynomials with a given Diophantine structure, and also proposes a method enabling to obtain an accurate estimate of the number of polynomials for all values of the parameter v.

Keywords: Lebesgue measure, Haar measure, Hausdorff dimension, Diophantine approximations, discriminants of integer polynomials, *p*-adic numbers.