МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук, профессор
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В статье изучаются степени элементов в полиадических полугруппах специального вида, то есть в полиадических полугруппах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной полугруппы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n-арной операции η.

Ключевые слова: полиадическая операция, n-арная полугруппа, степень элемента.

Введение

Данная статья посвящена изучению степеней элементов в l-арных полугруппах специального вида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. В ней доказаны результаты, позволяющие для каждого элемента **a** l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ находить его полиадические степени $\mathbf{a}^{[\nu]}$, компоненты которых выражаются через компоненты элемента **a** с помощью n-арной операции η n-арной полугруппы, на декартовой степени которой построена указанная l-арная полугруппа.

Взяв за основу определение Поста [1] полиадической степени элемента n-арной группы, определим степень элемента n-арной полугруппы.

Назовём *ν-ой n-адической степенью* элемента a n-арной полугруппы $< A, \eta >$ элемент этой же n-арной полугруппы, обозначаемый символом $a^{[\nu]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[\nu]} = a, \text{ если } \nu = 0,$$

$$a^{[\nu]} = \eta(\underbrace{a \ \ldots \ a}_{\nu(n-1)+1}), \text{ если } \nu > 0.$$

Замечание. В полугруппе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством

$$a^{[\nu]} = a^{\nu+1}, \nu \geq 0.$$

В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Всю необходимую информацию, используемую в данной статье, в том числе об операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и ее частном случае – операции $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$, можно найти в [2, 3].

В статье существенно используется следующая теорема.

Теорема [2]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа.*

1. Основной результат

Согласно теореме из введения, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арная полугруппа. Укажем для каждого элемента этой l-арной полугруппы его ν-ую l-адическую степень.

Теорема 1.1. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \ldots, k. \tag{1.1}$$

Тогда ν-ая l-адическая степень $\mathbf{a}^{[\nu]}$ *элемента* $\mathbf{a}$ *имеет вид* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_j, \text{ если } \nu = 0,$$

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{\nu}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \ldots a_j \alpha_j}_{\nu} a_j), \text{ если } \nu > 0, \tag{1.2}$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{\nu})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \ldots a_1 \alpha_1}_{\nu} a_1), \ldots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \ldots a_k \alpha_k}_{\nu} a_k)), \text{ если } \nu > 0.$$

Доказательство. Для $\nu = 0$ доказывать нечего.

Если $\nu > 0$, то положим

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{\nu(l-1)+1}) = (b_1, \ldots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}).$$

Из полученного равенства и равенства (1.1) вытекает

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{\nu}).$$

Следовательно, верно первое равенство в (1.2) для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, а значит, ввиду ассоциативности n-арной операции η, верно и второе равенство в (1.2). Теорема доказана.

Покажем, что если в теореме 1.1 подстановка σ оставляет неподвижным некоторый символ, то компонента элемента $\mathbf{a}^{[\nu]}$, индекс которой совпадает с этим символом, имеет вид, указанный в следующем предложении.

Предложение 1.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$ *и оставляет неподвижным символ* m, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда m-я компонента* b_m *элемента* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$ *имеет вид*

$$b_m = a_m^{[s\nu]}.$$

Доказательство. Так как

$$\mathbf{a}^{[0]} = \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k),\ a_m^{[s0]} = a_m^{[0]} = a_m,$$

то для $\nu = 0$ равенство из формулировки предложения верно.

Так как подстановка σ оставляет неподвижным символ m, то последовательность α_m из формулировки теоремы 1.1 имеет вид

$$\alpha_m = \underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{l-2},$$

а для $\nu > 0$ элемент b_m переписывается в виде

$$b_m = \eta(\, a_m \underbrace{\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{l-2} a_m \ \ldots \ \underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{l-2} a_m}_{\nu}\,) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{\nu(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{a_m \ \ldots \ a_m}_{\nu s(n-1)+1}) = a_m^{[s\nu]}.$$

Предложение доказано.

В следующей теореме, в отличие от теоремы 1.1, указан порядок подстановки σ. Это позволило более детально описать компоненты полиадических степеней элементов l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Теорема 1.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит натуральное d,* $l = td + 1$ *для некоторого натурального t,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k. \qquad (1.3)$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \textit{если}\ \nu = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\, a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{t\nu}), \ldots, \eta(\, a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{t\nu}\,)) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \ldots a_1 \alpha_1}_{t\nu} a_1), \ldots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \ldots a_k \alpha_k}_{t\nu} a_k)),\ \textit{если}\ \nu > 0. \qquad (1.4)$$

Доказательство. Так как порядок подстановки σ делит d, то из условия $l = td + 1$ следует, что порядок подстановки σ делит также $l - 1$. Следовательно, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Таким образом, выполнены условия теоремы из введения, согласно которой $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа.

По условию порядок подстановки σ делит d, и $l = td + 1$. Поэтому σ^d – тождественная подстановка и, кроме того,

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1} \, a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}$$

или, учитывая равенство (1.3),

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j. \qquad (1.5)$$

Для $\nu = 0$ доказывать нечего.

Если $\nu > 0$, то, как и в теореме 1.1, положим

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ \ldots \ \mathbf{a}}_{\nu(l-1)+1}) = (b_1, \ldots, b_k).$$

Проведя те же вычисления, что и в теореме 1.1, получим

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}).$$

Из этого равенства и равенства (1.5) вытекает

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j}_{\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t} \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t}}_{\nu}) = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu})$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно верно первое равенство в (1.4), а значит, ввиду ассоциативности n-арной операции η, верно и второе равенство в (1.4). Теорема доказана.

Замечание 1.1. Ясно, что теорема 1.1 вытекает из теоремы 1.2 при $t = 1$ ($d = l - 1$).

Замечание 1.2. В теореме 1.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка d, в частности, цикл длины d. Если же в качестве подстановки σ в указанной теореме взять подстановку порядка $d = l - 1$, то $t = 1$ в формулах, описывающих компоненты степени $\mathbf{a}^{[\nu]}$.

Замечание 1.3. Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, σ – тождественная подстановка, то согласно определению полиадической степени имеем

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta(\underbrace{\mathbf{a} \ \ldots \ \mathbf{a}}_{\nu(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{(a_1, \ldots, a_k) \ \ldots \ (a_1, \ldots, a_k)}_{\nu(l-1)+1}) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \ldots, a_1}_{\nu(l-1)+1}), \ldots, \eta(\underbrace{a_k \ldots, a_k}_{\nu(l-1)+1})). \qquad (1.6).$$

Если теперь в теореме 1.2 $d = 1$, то есть σ – тождественная подстановка, то $t = l - 1$, а последовательность (1.3) – пустая. В этом случае равенство (1.4) принимает вид (1.6). Следовательно, случай тождественной подстановки содержится в теореме 1.2 при $d = 1$.

Для тождественной подстановки имеет место предложение, устанавливающее связь между степенями элементов в l-арной полугруппе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ и степенями компонент этих элементов в n-арной полугруппе $< A, \eta >$.

Предложение 1.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* σ *– тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$*,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*. Тогда для любого* $\nu \geq 0$ *верно равенство*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_1^{[s\nu]}, \ldots, a_k^{[s\nu]}).$$

Доказательство. Ясно, что для $\nu = 0$ равенство из формулировки теоремы верно.

Так как $l - 1 = s(n - 1)$, то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ верно равенство

$$\eta(\underbrace{a_j \ldots, a_j}_{\nu(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{a_j \ldots, a_j}_{\nu s(n-1)+1}) = a_j^{[s\nu]}, \nu > 0.$$

Таким образом, ввиду (1.6), формула из условия предложения верна для любого $\nu \geq 0$. Предложение доказано.

Если в теореме 1.2 $d = n - 1$, то $l - 1 = t(n - 1)$, откуда и из равенства $l - 1 = s(n - 1)$ следует $t = s$. Поэтому теорема 1.2 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит* $n - 1$*,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1\underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{s\nu}), \ldots, \eta(a_k\underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{s\nu})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1\alpha_1 \ldots a_1\alpha_1}_{s\nu} a_1), \ldots, \eta(\underbrace{a_k\alpha_k \ldots a_k\alpha_k}_{s\nu} a_k)), \text{ если } \nu > 0.$$

Если порядок δ подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = r\delta + 1$ для некоторого натурального r, то δ делит также $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = t\delta + 1$, где $t = sr$. Поэтому, если в теореме 1.2 в качестве подстановки σ взять подстановку порядка δ, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.4. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* δ*,* $n = r\delta + 1$ *для некоторого натурального* r*,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{\delta-1}(j)}, j = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \textit{если}\ \nu = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{s r \nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{s r \nu})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \ldots a_1 \alpha_1}_{s r \nu} a_1), \ldots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \ldots a_k \alpha_k}_{s r \nu} a_k)),\ \textit{если}\ \nu > 0.$$

Замечание 1.4. В теоремах 1.1 –1.4 случай $\nu = 0$ можно считать содержащимся в формулах для случая $\nu > 0$, если считать $\eta(a) = a$ для любого $a \in A$. Будем иметь это в виду при формулировке следующего и других подобных результатов.

2. Случай цикла (12 … *d*)

Следующая теорема получается из теоремы 1.2,если в ней σ – цикл $(12 \ldots d)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа,* $d \le k$, $l = td + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu \ge 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s, (12 \ldots d), k} >$,

$$\alpha_j = a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1}, j = 1, \ldots, d. \tag{2.1}$$

Тогда $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \ldots a_j \alpha_j}_{t\nu} a_j), j = 1, \ldots, d, \tag{2.2}$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[s\nu]}, \ldots, b_k = a_k^{[s\nu]}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если $v = 0$, то последовательности

$$\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu},\ \underbrace{a_j \alpha_j \ldots a_j \alpha_j}_{t\nu}$$

– пустые, а равенства (2.2) и (2.3) принимают вид

$$b_1 = a_1, \ldots, b_k = a_k.$$

Следовательно, для нулевой степени $\mathbf{a}^{[0]}$ теорема верна.

Если σ – цикл $(12 \ldots d)$, то

$$\sigma(j) = j + 1,$$

$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j + 1) = j + 2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{d-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-1-j}(j)) = \sigma(d - 1) = d,$$

$$\sigma^{d+1-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-j}(j)) = \sigma(d) = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{d-1}(j) = \sigma(\sigma^{d-2}(j)) = \sigma(j - 2) = j - 1,$$

$$\sigma^{d}(j) = \sigma(\sigma^{d-1}(j)) = \sigma(j - 1) = j.$$

Поэтому для $j = 1, \ldots, d$ последовательности α_j из теоремы 1.2, определяемые равенствами (1.3), принимают вид (2.1). Таким образом, компоненты $b_1, \ldots, b_d$ определяются равенством (2.2).

Для компонент $b_{d+1}, \ldots, b_k$ применяется предложение 1.1.Теорема доказана.

Замечание 2.1. Выпишем все компоненты b_j степени $\mathbf{a}^{[v]}$ из теоремы 2.1.

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(a_1 \underbrace{a_2 \ldots a_d a_1 \ldots a_2 \ldots a_d a_1}_{tv}),$$

$$b_2 = \eta(a_2 \underbrace{a_3 \ldots a_d a_1 a_2 \ldots a_3 \ldots a_d a_1 a_2}_{tv}),$$

$$b_3 = \eta(a_3 \underbrace{a_4 \ldots a_d a_1 a_2 a_3 \ldots a_4 \ldots a_d a_1 a_2 a_3}_{tv}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{d-1} = \eta(a_{d-1} \underbrace{a_d a_1 \ldots a_{d-2} a_{d-1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{d-2} a_{d-1}}_{tv}),$$

$$b_d = \eta(a_d \underbrace{a_1 \ldots a_{d-1} a_d \ldots a_1 \ldots a_{d-1} a_d}_{tv}),$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \ldots, b_k = a_k^{[sv]}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_d \ldots a_1 a_2 \ldots a_d}_{tv} a_1),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \ldots a_d a_1 \ldots a_2 a_3 \ldots a_d a_1}_{tv} a_2),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \ldots a_d a_1 a_2 \ldots a_3 a_4 \ldots a_d a_1 a_2}_{tv} a_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{d-1} = \eta(\underbrace{a_{d-1} a_d a_1 \ldots a_{d-2} \ldots a_{d-1} a_d a_1 \ldots a_{d-2}}_{tv} a_{d-1}),$$

$$b_d = \eta(\underbrace{a_d a_1 \ldots a_{d-1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{d-1}}_{tv} a_d),$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \ldots, b_k = a_k^{[sv]}).$$

Если порядок d цикла $(12 \ldots d)$ делит $n - 1$, то теорема 2.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

Теорема 2.2. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, $d \le k$, $n = rd + 1$ *для некоторого натурального* r, $v \ge 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\,(12 \ldots d),\, k} >$,

$$\alpha_j = a_{j+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{j-1}, j = 1, \ldots, d.$$

Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{sr\nu})) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \ldots a_j \alpha_j}_{sr\nu} a_j),$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \ldots, b_k = a_k^{[sv]}.$$

Следующие две теоремы получаются из теорем 2.1 и 2.2, если в них положить $d = k$.

Теорема 2.3. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, $l = tk + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1 = \eta(a_1 \underbrace{a_2 \ldots a_k a_1 \ldots a_2 \ldots a_k a_1}_{t\nu}),$$

$$b_2 = \eta(a_2 \underbrace{a_3 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_3 \ldots a_k a_1 a_2}_{t\nu}),$$

$$b_3 = \eta(a_3 \underbrace{a_4 \ldots a_k a_1 a_2 a_3 \ldots a_4 \ldots a_k a_1 a_2 a_3}_{t\nu}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{k-1} = \eta(a_{k-1} \underbrace{a_k a_1 \ldots a_{k-2} a_{k-1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{k-2} a_{k-1}}_{t\nu}),$$

$$b_k = \eta(a_k \underbrace{a_1 \ldots a_{k-1} a_k \ldots a_1 \ldots a_{k-1} a_k}_{t\nu})) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots a_1 a_2 \ldots a_k}_{t\nu} a_1),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \ldots a_k a_1 \ldots a_2 a_3 \ldots a_k a_1}_{t\nu} a_2),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_3 a_4 \ldots a_k a_1 a_2}_{t\nu} a_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \ldots a_{k-2} \ldots a_{k-1} a_k a_1 \ldots a_{k-2}}_{t\nu} a_{k-1}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \ldots a_{k-1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{k-1}}_{t\nu} a_k)).$$

Теорема 2.4. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, $n = rk + 1$ *для некоторого натурального* r, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\,\ldots\,k),\,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1 = \eta(a_1 \underbrace{a_2 \ldots a_k a_1 \ldots a_2 \ldots a_k a_1}_{sr\nu}),$$

$$b_2 = \eta(a_2 \underbrace{a_3 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_3 \ldots a_k a_1 a_2}_{sr\nu}),$$

$$b_3 = \eta(\,a_3\underbrace{a_4\ldots a_k a_1 a_2 a_3\ldots a_4\ldots a_k a_1 a_2 a_3}_{sr\nu}\,),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{k-1} = \eta(\,a_{k-1}\underbrace{a_k a_1\ldots a_{k-2}a_{k-1}\ldots a_k a_1\ldots a_{k-2}a_{k-1}}_{sr\nu}\,),$$

$$b_k = \eta(\,a_k\underbrace{a_1\ldots a_{k-1}a_k\ldots a_1\ldots a_{k-1}a_k}_{sr\nu}\,)) =$$

$$= (b_1 = \eta(\,\underbrace{a_1 a_2\ldots a_k\ldots a_1 a_2\ldots a_k}_{sr\nu}a_1\,\Big),$$

$$b_2 = \eta(\,\underbrace{a_2 a_3\ldots a_k a_1\ldots a_2 a_3\ldots a_k a_1}_{sr\nu}a_2\,),$$

$$b_3 = \eta(\,\underbrace{a_3 a_4\ldots a_k a_1 a_2\ldots a_3 a_4\ldots a_k a_1 a_2}_{sr\nu}a_3\,),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{k-1} =\eta(\,\underbrace{a_{k-1}a_k a_1\ldots a_{k-2}\ldots a_{k-1}a_k a_1\ldots a_{k-2}}_{sr\nu}a_{k-1}\,),$$

$$b_k = \eta(\,\underbrace{a_k a_1\ldots a_{k-1}\ldots a_k a_1\ldots a_{k-1}}_{sr\nu}a_k\,)).$$

Следующая теорема получается из теоремы 2.3, если в ней положить $k = n - 1$.

Теорема 2.5. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^{n-1}, \eta_{s,\,(12\,\ldots\,n-1),\,n-1} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1 = \eta(\,a_1\underbrace{a_2\ldots a_{n-1}a_1\ldots a_2\ldots a_{n-1}a_1}_{s\nu}\,),$$

$$b_2 = \eta(\,a_2\underbrace{a_3\ldots a_{n-1}a_1 a_2\ldots a_3\ldots a_{n-1}a_1 a_2}_{s\nu}\,),$$

$$b_3 = \eta(\,a_3\underbrace{a_4\ldots a_{n-1}a_1 a_2 a_3\ldots a_4\ldots a_{n-1}a_1 a_2 a_3}_{s\nu}\,),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n-2} = \eta(\,a_{n-2}\underbrace{a_{n-1}a_1\ldots a_{n-3}a_{n-2}\ldots a_{n-1}a_1\ldots a_{n-3}a_{n-2}}_{s\nu}\,),$$

$$b_{n-1} = \eta(\,a_{n-1}\underbrace{a_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}\ldots a_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}}_{s\nu}\,)) =$$

$$= (b_1 = \eta(\,\underbrace{a_1 a_2\ldots a_{n-1}\ldots a_1 a_2\ldots a_{n-1}}_{s\nu}a_1\,\Big),$$

$$b_2 = \eta(\,\underbrace{a_2 a_3\ldots a_{n-1}a_1\ldots a_2 a_3\ldots a_{n-1}a_1}_{s\nu}a_2\,),$$

$$b_3 = \eta(\,\underbrace{a_3 a_4\ldots a_{n-1}a_1 a_2\ldots a_3 a_4\ldots a_{n-1}a_1 a_2}_{s\nu}a_3\,),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n-2} = \eta(\underbrace{a_{n-2}a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-3} \ldots a_{n-2}a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-3}}_{s\nu} a_{n-2}),$$

$$b_{n-1} = \eta(\underbrace{a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-2} \ldots a_{n-1}a_1 \ldots a_{n-2}}_{s\nu} a_{n-1})).$$

Следующая теорема получается из теоремы 2.3, если в ней положить $k = l - 1$.

Теорема 2.6. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{l-1})$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^{l-1}, \eta_{1,\,(12\,\ldots\,l-1),\,l-1} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1 = \eta(a_1 \underbrace{a_2 \ldots a_{l-1}a_1 \ldots a_2 \ldots a_{l-1}a_1}_{\nu}),$$

$$b_2 = \eta(a_2 \underbrace{a_3 \ldots a_{l-1}a_1a_2 \ldots a_3 \ldots a_{l-1}a_1a_2}_{\nu}),$$

$$b_3 = \eta(a_3 \underbrace{a_4 \ldots a_{l-1}a_1a_2a_3 \ldots a_4 \ldots a_{l-1}a_1a_2a_3}_{\nu}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{l-2} = \eta(a_{l-2} \underbrace{a_{l-1}a_1 \ldots a_{l-3}a_{l-2} \ldots a_{l-1}a_1 \ldots a_{l-3}a_{l-2}}_{\nu}),$$

$$b_{l-1} = \eta(a_{l-1} \underbrace{a_1 \ldots a_{l-2}a_{l-1} \ldots a_1 \ldots a_{l-2}a_{l-1}}_{\nu})) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1a_2 \ldots a_{l-1} \ldots a_1a_2 \ldots a_{l-1}}_{\nu} a_1),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2a_3 \ldots a_{l-1}a_1 \ldots a_2a_3 \ldots a_{l-1}a_1}_{\nu} a_2),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3a_4 \ldots a_{l-1}a_1a_2 \ldots a_3a_4 \ldots a_{l-1}a_1a_2}_{\nu} a_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{l-2} = \eta(\underbrace{a_{l-2}a_{l-1}a_1 \ldots a_{l-3} \ldots a_{l-2}a_{l-1}a_1 \ldots a_{l-3}}_{\nu} a_{l-2}),$$

$$b_{l-1} = \eta(\underbrace{a_{l-1}a_1 \ldots a_{l-2} \ldots a_{l-1}a_1 \ldots a_{l-2}}_{\nu} a_{l-1})).$$

3. Следствия для $d = 2$

Полагая в теореме 1.2 $d = 2$, получим

Следствие 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка 2,* $l = 2t + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{a_{\sigma(1)}a_1 \ldots a_{\sigma(1)}a_1}_{t\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{a_{\sigma(k)}a_k \ldots a_{\sigma(k)}a_k}_{t\nu})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1a_{\sigma(1)} \ldots a_1a_{\sigma(1)}}_{t\nu} a_1), \ldots, \eta(\underbrace{a_ka_{\sigma(k)} \ldots a_ka_{\sigma(k)}}_{t\nu} a_k)).$$

Полагая а теореме 1.4 $\delta = 2$, получим

Следствие 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка 2,* $n = 2r + 1$ *для некоторого натурального* r, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{a_{\sigma(1)}a_1 \ldots a_{\sigma(1)}a_1}_{sr\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{a_{\sigma(k)}a_k \ldots a_{\sigma(k)}a_k}_{sr\nu})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 a_{\sigma(1)} \ldots a_1 a_{\sigma(1)}}_{sr\nu} a_1), \ldots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} \ldots a_k a_{\sigma(k)}}_{sr\nu} a_k)).$$

Полагая в следствиях 3.1 и 2.2 $\sigma = (i\,j)$ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$, получим

Следствие 3.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* $l = 2t + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,(ij),k} >$. *Тогда* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_i = \eta(a_i \underbrace{a_j a_i \ldots a_j a_i}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_i a_j \ldots a_i a_j}_{t\nu} a_i),$$

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_i a_j \ldots a_i a_j}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_j a_i \ldots a_j a_i}_{t\nu} a_j),$$

$$b_m = a_m^{[s\nu]}, m \neq i, m \neq j.$$

Следствие 3.4. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* $n = 2r + 1$ *для некоторого натурального* r, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,(ij),k} >$. *Тогда*

$$b_i = \eta(a_i \underbrace{a_j a_i \ldots a_j a_i}_{sr\nu}) = \eta(\underbrace{a_i a_j \ldots a_i a_j}_{sr\nu} a_i),$$

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_i a_j \ldots a_i a_j}_{sr\nu}) = \eta(\underbrace{a_j a_i \ldots a_j a_i}_{sr\nu} a_j),$$

$$b_m = a_m^{[s\nu]}, m \neq i, m \neq j.$$

Полагая а теореме 2.1 $d = 2$, получим

Следствие 3.5. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* $l = 2t + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,(12),k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1 = \eta(a_1 \underbrace{a_2 a_1 \ldots a_2 a_1}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_1 a_2}_{t\nu} a_1),$$

$$b_2 = \eta(a_2 \underbrace{a_1 a_2 \ldots a_1 a_2}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \ldots a_2 a_1}_{t\nu} a_2),$$

$$b_3 = a_3^{[s\nu]}, \ldots, b_k = a_k^{[s\nu]}).$$

Полагая а теореме 2.2 $d = 2$, получим

Следствие 3.6. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная полугруппа,* $n = 2r + 1$ *для некоторого натурального* r, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $< A^k, \eta_{s,(12),k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(a_1\underbrace{a_2a_1\ldots a_2a_1}_{sr\nu}) = \eta(\underbrace{a_1a_2\ldots a_1a_2}_{sr\nu}a_1),$$

$$b_2 = \eta(a_2\underbrace{a_1a_2\ldots a_1a_2}_{sr\nu}) = \eta(\underbrace{a_2a_1\ldots a_2a_1}_{sr\nu}a_2),$$

$$b_3 = a_3^{[s\nu]}, \ldots, b_k = a_k^{[s\nu]}).$$

Полагая а теореме 2.3 или в следствии 3.5 $k = 2$, получим

Следствие 3.7. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, $l = 2t + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^2, \eta_{s,(12),2} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(a_1\underbrace{a_2a_1\ldots a_2a_1}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_1a_2\ldots a_1a_2}_{t\nu}a_1),$$

$$b_2 = \eta(a_2\underbrace{a_1a_2\ldots a_1a_2}_{t\nu}) = \eta(\underbrace{a_2a_1\ldots a_2a_1}_{t\nu}a_2)).$$

Полагая а теореме 2.4 или в следствии 3.6 $k = 2$, получим

Следствие 3.8. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, $n = 2r + 1$ *для некоторого натурального* r, $\nu \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ – *произвольный элемент l-арной полугруппы* $< A^2, \eta_{s,(12),2} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(a_1\underbrace{a_2a_1\ldots a_2a_1}_{sr\nu}) = \eta(\underbrace{a_1a_2\ldots a_1a_2}_{sr\nu}a_1),$$

$$b_2 = \eta(a_2\underbrace{a_1a_2\ldots a_1a_2}_{sr\nu}) = \eta(\underbrace{a_2a_1\ldots a_2a_1}_{sr\nu}a_2)).$$

4. Следствия для $n = 2$

Сформулируем несколько следствий для $n = 2$.

Если в теореме 1.1 и предложении 1.1 положить $n = 2$, то получим

Следствие 4.1. *Пусть A – полугруппа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{s+1} = \sigma$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(s + 1)$*-арной полугруппы* $< A^k, [\ ]_{s+1,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{s-1}(j)}, j = 1, \ldots, k.$$

Тогда ν*-ая* $(s + 1)$*-адическая степень* $\mathbf{a}^{[v]}$ *элемента* $\mathbf{a}$ *имеет вид* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_j, \text{ если } \nu = 0,$$

$$b_j = a_j(\alpha_j a_j)^{\nu} = (a_j\alpha_j)^{\nu}a_j, \text{ если } \nu > 0,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1(\alpha_1a_1)^{\nu} = (a_1\alpha_1)^{\nu}a_1, \ldots, a_k(\alpha_ka_k)^{\nu} = (a_k\alpha_k)^{\nu}a_k), \text{ если } \nu > 0.$$

Если подстановка σ *оставляет неподвижным символ* m, *то*

$$b_m = a_m^{s\nu+1}.$$

Если в теореме 1.2 и предложении 1.1 положить $n = 2$, то получим

Следствие 4.2. *Пусть A – полугруппа, порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит натуральное d, $s = td$ для некоторого натурального t,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент $(s + 1)$-арной полугруппы* $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k.$$

Тогда ν-ая $(s + 1)$-адическая степень $\mathbf{a}^{[\nu]}$ *элемента* $\mathbf{a}$ *имеет вид* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_j,\ \text{если } \nu = 0,$$

$$b_j = a_j(\alpha_j a_j)^{t\nu} = (a_j\alpha_j)^{t\nu}a_j,\ \text{если } \nu > 0,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \text{если } \nu = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_1(\alpha_1 a_1)^{t\nu} = (a_1\alpha_1)^{t\nu}a_1, \ldots, a_k(\alpha_k a_k)^{t\nu} = (a_k\alpha_k)^{t\nu}a_k),\ \text{если } \nu > 0.$$

Если подстановка σ оставляет неподвижным символ m, то

$$b_m = a_m^{s\nu+1} = a_m^{td\nu+1}.$$

Если в предложении 1.2 положить $n = 2$, то получим

Следствие 4.3. *Пусть A – полугруппа, σ – тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент $(s + 1)$-арной полугруппы* $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$. *Тогда для любого $\nu \geq 0$ верно равенство*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_1^{s\nu+1}, \ldots, a_k^{s\nu+1}).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

2. ***Гальмак, А. М.*** О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

3. ***Гальмак, А. М.*** Об ассоциативности полиадических операций / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович).

Galmak A. M. **SKEW ELEMENTS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM**

The article deals with powers in polyadic semigroups of a special form, i.e. in polyadic semigroups with the l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called a polyadic operation of a special form and is defined on the Cartesian power of A^k n-ary semigroup $< A, \eta >$ by the substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$, and the n-ary operation η.

Keywords: polyadic operation, *n*-ary semigroup, power.