УДК 511.42

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ P–АДИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА БОЛЬШОЙ МЕРЫ ЛЕБЕГА–ХААРА В ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

О. Н. Кемеш
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный аграрно-технический университет

И. А. Корлюкова
кандидат физико-математических наук, доцент
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Теория диофантовых приближений возникла из теории Дирихле и Минковского, в которых были доказаны оценки сверху при замене действительных чисел рациональными числами и трансцендентных чисел алгебраическими. В последнее время появились работы, в которых найдены оценки меры Лебега множества таких интервалов $I \subset \mathbb{R}$, *для которых неравенства* $\left|P(x)\right| < H^{-\omega}$ *в полиномах* $P(x) \in \mathbb{Z}\left[x\right]$ *степени* $\deg P(x) = n$ *и высоты* $H = H(P)$, *равной максимуму модуля коэффициентов* $P(x)$. *В данной работе получены оценки снизу мер Лебега-Хаара множеств* $\sigma(P)$ *решений систем неравенств*

$$\left|P(x)\right| < H^{-v_1},\ \left|P(\omega)\right|_p < H^{-v_2},\ v_i > 0,\ -1 \le v_1 + v_2 < \frac{n+1}{3}.$$

Доказательство основано на недавних результатах Д. Клейнбока, Г. Маргулиса и В. Бересневича в метрической теории диофантовых приближений.

Ключевые слова: диофантовы приближения, алгебраические числа, дискриминанты, поле *p*-адических чисел, совместные приближения.

Ведение

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

многочлен с целыми коэффициентами степени n и высоты $H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$. Дискриминантом многочлена P с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \tag{2}$$

Если дискриминант записать как определитель матрицы, содержащей коэффициенты многочлена P, не имеющего кратных корней, то нетрудно получить неравенства

$$1 \leq |D(P)| < c_1 Q^{2n-2}. \quad (3)$$

Положительные величины, зависящие только от n и не зависящие от H и $Q > 0$, будем обозначать $c(n)$; где это необходимо, эти константы будут пронумерованы $c_j = c_j(n), j = 1,2,\cdots$. Символ $\#B$ – это количество элементов конечного множества B, μA – меры Лебега и Хаара измеримых множеств $A \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим неравенство

$$|P(x)| < \varepsilon, \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Решением неравенства (4) является множество действительных чисел $x \in \mathbb{R}$, представляющее собой объединение не более, чем $m \leq n$, интервалов I_n длины $\mu I_n \leq 2^{n-1}\varepsilon|P'(\alpha_1)|$, где α_1 – ближайший к x корень $P(x)$. Используя дискриминант многочлена (1), можно доказать оценку $|P'(\alpha_1)| > c_2 H^{-n+1}$.

Оценка снизу для $|P'(\alpha_1)|$ позволяет получить оценки меры решений неравенства (4), однако, их недостаточно для получения точных результатов (проблема Малера, проблемы Бейкера-Шмидта, аналоги теоремы Хинчина). Поэтому кроме оценки снизу для $|P'(\alpha_1)|$ необходимо иметь оценки сверху количества полиномов, для которых эти оценки выполняются.

В работе получены наилучшие к настоящему времени результаты, позволяющие доказать новые теоремы в метрической теории диофантовых приближений. Найдены новые оценки для количества многочленов третьей и четвертой степени с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа.

Рассмотрим следующий класс многочленов при натуральном $Q > 1$:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in Z[x]: \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \quad (5)$$

В (5) степень многочлена $P(x)$ обозначена $\deg P$, H – высота $P(x)$.

В работе Фолькмана показано, что проблема Малера [1] будет решена, если найти при $0 \leq v \leq n-1$ асимптотическое поведение величины $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$, где

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q): 1 \leq |D(P) < Q^{2n-2-2v}|\}. \quad (6)$$

Исследование класса полиномов $\mathcal{P}_n(Q, v)$ важно в теории диофантовых уравнений и диофантовых приближений. Давенпорт нашел оценку сверху для суммы значений дискриминантов многочленов из класса $\mathcal{P}_3(Q,v)$, что позволило Фолькману доказать кубический случай известной проблемы Малера. Широко применял оценки дискриминантов в задачах метрической теории диофантовых приближений В. Г. Спринджук [2, 3]. Им и Р. Бейкером найдена оценка снизу $\#\mathcal{P}_n(Q,v) > c_3 Q^{n+1-2v}$ для $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$. И Д.В. Коледой сверху $\#\mathcal{P}_n(Q,v) < c_3^{/} Q^{n+1-v}$ для $0 \leq v \leq 1$.

В последние 20 лет в теории диофантовых приближений было получено несколько значительных результатов, связанных с проблемой Малера 1932 года [4–6], так и ее обобщением на невырожденные функции и поверхности [7–9]. Новые методы оказались полезными в задачах по оценкам количества целочисленных полиномов с малыми значениями модулей производных в корнях полиномов [10] и заданными оценками модулей дискриминантов [1, 11–19]. Некоторые из результатов приведены в монографиях [20–22].

Основная часть

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни $P(x)$ как действительные, так и комплексные. В некоторых задачах принципиально доказать, является ли корень α_i действительным алгебраическим числом или $\alpha_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Лемма 1. Если полином $P(x)$ удовлетворяет условию $|a_n| > ch, h = h(P)$, то

$$\max_{(i)}|\alpha_i| \leq \frac{n}{c} \quad (i = 1,2,\ldots,n), \quad (0 < c \leq 1). \tag{7}$$

Лемма 2. Пусть $P \in \mathbf{P_n}(h), w$ – вещественное или комплексное число, $w \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|w - \alpha_1| < 2^n \min\left(\frac{|P(w)|}{|P'(\alpha_1)|},\ \left(\frac{|P(w)|}{|P'(\alpha_1)|}\ |\alpha_1 - \alpha_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{8}$$

Лемма 3. Для полинома (1) имеем

$$\max_{(i)}|P(l)| \geq c(n)\max_{(i)}|a_i|,$$

где l, i принимают значения 0, 1, …, *n*.

Лемма 4. Пусть $P_1,\ P_2, \ldots, P_k$ – полиномы. Тогда

$$h(P_1 P_2 \ldots P_k) > ch(P_1)h(P_2)\ldots h(P_k),$$

где c зависит лишь от степеней полиномов $P_1,\ P_2, \ldots, P_k$, $c > 0$.

Лемма 5. Пусть $|\alpha_h|$ – бесконечная последовательность положительных чисел. Для почти всех комплексных чисел существует лишь конечное число решений неравенства

$$|a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3| < h^{-1}\alpha_h \tag{9}$$

в целых числах a_0, a_1, a_2, a_3 с условием max $(|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|) \le h,$ если только

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{-1}\alpha_h^2 < \infty.$$

Леммы 1–5 доказаны в [2, 3, 22].

Разбиение на ε –классы в $\mathbb{R}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное, малое и в дальнейшем фиксированное число. Корни α полиномов $P \in \mathbf{P}_n$ разобьем на классы (ε-классы) следующим образом.

Пусть $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – все корни полинома P, минимального для α, лежащие в верхней полуплоскости и удовлетворяющие условию

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - \alpha_3| \le \dots \le |\alpha_1 - \alpha_k| < 1. \tag{10}$$

Считаем, что $k \ge 2$. Положим $h = h(P)$,

$$m = \left[\frac{n}{\varepsilon}\right] + 1, |\alpha_1 - \alpha_i| = h^{-\rho_i} \quad (i = 2, 3, \dots, k). \tag{11}$$

и определим целые числа $r_2, r_3, \dots, r_k$ из неравенств

$$\frac{r_i}{m} \le \rho_i < \frac{r_i + 1}{m} \qquad (i = 2, 3, \dots, k). \tag{12}$$

Тогда

$$h^{-(r_i+1)/m} < |\alpha_1 - \alpha_i| \le h^{-r_i/m} \qquad (i = 2, 3, \dots, k). \tag{13}$$

В силу (10) $\rho_2 \ge \rho_3 \ge \dots \ge \rho_k > 0$, а в силу (12) $r_i = [m\rho_i]$, $r_2 \ge r_3 \ge \dots \ge r_k \ge 0$. Таким образом, с каждым корнем $\alpha_1 = \alpha$ полинома P можем связать целочисленный вектор $r = (r_2, r_3, \dots, r_k)$ с неотрицательными компонентами, при этом выполняются неравенства (13).

Поле p-адических чисел.

Пусть $F(x)$ – полином над K', K' – конечное расширение K, $F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \ne 0$. Считаем, что все корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ полинома F различны и упорядочены так, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - \alpha_3| \le \dots \le |\alpha_1 - \alpha_k|.$$

Для каждого корня α_i определим множество $S(\alpha_i)$ тех точек ω поля K, которые удовлетворяют условию

$$\min_{(j)}\left|\omega-\alpha_j\right| = |\omega-\alpha_i| \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Лемма 6. [3, 22]. Пусть $\omega \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|\omega-\alpha_1| \le \min\left(\frac{|F(\omega)|}{|F'(\alpha_1)|}, \left(\frac{|F(\omega)|}{|F'(\alpha_1)|}\,|\alpha_1-\alpha_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Лемма 7. [3, 22]**.** Пусть $\omega \in K$ определена условием

$$|\omega_0-\alpha_1| \le \max|\omega-\alpha_1|, \quad \omega\epsilon\sigma_1(F),$$

где максимум берется по всем ω из области $\sigma_1(F)$. Тогда

1. Если $|\omega_0-\alpha_1| \le |\alpha_1-\alpha_2|$, то область $\sigma_1(F)$ есть круг

$$|\omega-\alpha_1| \le |\omega_0-\alpha_1| = \frac{|F(\omega_0)|}{|F'(\alpha_1)|}.$$

1. Если $|\omega_0-\alpha_1| \ge |\alpha_1-\alpha_2|$, то область $\sigma_1(F)$ есть пересечение $S(\alpha_1)$ с кругом

$$|\omega-\alpha_1| \le |\omega_0-\alpha_1|\left(\frac{|F(\omega)|}{|F'(\alpha_1)|}\,|\alpha_1-\alpha_2|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 8. [3, 22]**.** Если $|a_n|_p \ge 1$, то $\left|\alpha_j\right|_p < \rho^{-n}$.

Разбиение на -классы в поле Q_p.

В дальнейшем предполагаем, что $n \ge 3$.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и сделаем разбиение корней полиномов $F \in F_n^*$ на классы аналогично тому, как это делалось в первой части работы.

Пусть $F \in F_n^*$, $\alpha = \alpha_1$ – некоторый корень F, а остальные корни полинома F занумерованы так, что

$$|a_1-\alpha_2|_p \le |a_1-\alpha_3|_p \le \dots \le |a_1-\alpha_k|_p \le 1 \le \dots \le |a_1-\alpha_n|_p. \quad (14)$$

Мы считаем здесь, что существует корень полинома α_k, удовлетворяющий неравенству $|a_1-\alpha_k|_p \le 1$.

Положим $m = \left[\frac{n}{\varepsilon}\right]+1$, $|\alpha_1-\alpha_i| = h^{-\rho_i}$ $\quad (i = 2, 3, \dots, k)$.

Определим целые числа $r_2, r_3, \dots, r_k$ неравенствами

$$\frac{r_i}{m} \le \rho_i < \frac{r_i+1}{m} \qquad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (15)$$

Очевидно, тогда

$$h^{-(r_i+1)/m} < |\alpha_1 - \alpha_i| \le h^{-r_i/m} \qquad (i = 2, 3, \dots, k).$$

В силу (14) $\rho_2 \ge \rho_3 \ge \dots \ge \rho_k \ge 0$, так что из (15) следует

$$r_i = [m\rho_i], r_2 \ge r_3 \ge \dots \ge r_k \ge 0. \qquad (16)$$

Теперь каждому корню $\alpha = \alpha_1$ полинома $F \in F_n^*$ мы сопоставляем целочисленный вектор $r = (r_2, r_3, \dots, r_k)$ с неотрицательными компонентами. Все α, имеющие один и тот же вектор r, объединяем в один класс $K_\varepsilon(r) = K(r)$.

Лемма 9. [3, 22]**.** Если класс $K(r)$ содержит бесконечное число элементов, то

$$\sum_{i=2}^{k} (j-1)\frac{r_j}{m} \le n - 1.$$

Лемма 10. [12]. Пусть B_1 множество решений системы неравенств

$$\begin{gathered}
\delta_0 H^{-v_0} < |P(x)| < c_0 H^{-v_0};\\
\delta_0 H^{-v_j} < \left|P^{(j)}(x)\right| < c_0 H^{-v_j};\\
\dots\\
\delta_0 H < \left|P^{(k)}(x)\right| < c_0 H;\\
v_0 + v_1 + \dots + v_j = n - k, \qquad 1 \le j \le k, \qquad 1 \le k \le n-1,\\
v_0 - v_1 \ge v_1 - v_2 \ge v_2 - v_3 \ge \dots \ge v_{j-1} - v_j.
\end{gathered}$$

в неприводимых полиномах $P(x)$ степени n и высоты H, $H \le Q$. Тогда существуют такие числа $\delta_0 = \delta_0(n) < c_0 = c_0(n)$ и натуральное число $Q = Q(n)$ такое, где μ_1 — мера Лебега. $\mu_1 B_1 > \frac{3}{4}\mu_1 I$.

Лемма 11. Пусть K – некоторый цилиндр в $Q_p, \mathcal{Z}_1 \subset K$ – множество p-адических чисел, для которых справедлива система неравенств

$$\begin{gathered}
\delta_0 H^{-w_0} < |P(w)|_p < c_0 H^{-w_0};\\
\delta_0 H^{-w_j} < \left|P^{(j)}(w)\right|_p < c_0 H^{-vw_j};\\
\dots\\
\delta_0 < \left|P^{(k)}(w)\right|_p < c_0;\\
w_0 + w_1 + \dots + w_j = n + 1 - k, \qquad 1 \le j \le k, \qquad 1 \le k \le n-1,\\
w_0 - w_1 \ge w_1 - w_2 \ge v_2 - v_3 \ge \dots \ge w_{j-1} - w_j.
\end{gathered} \qquad (17)$$

Тогда существуют такие действительные числа δ_0, c_0 и натуральное число $Q > Q_0(n)$ такие, что

$$\mu_2 \mathcal{Z}_1 > \frac{3}{4}\mu_2 K,$$

где μ_2 – мера Хаара в Q_p.

Лемма 12. (Лемма Гензеля). Пусть $P(w) \in \mathbb{Z}_p[w], w \in \mathbb{Z}_p$ и $|P(w)| < |P'(w)|_p^2$. Тогда существует целое алгебраическое число $\alpha \in Q_p$, такое, что $P(\alpha) = 0$, $|P'(\alpha)|_p = |P'(w)|_p$, и

$$|x - \alpha|_p < |P(x)|_p |P'(w)|_p^{-1} < |P'(w)|_p.$$

Лемма 12 вместе с леммами позволяет доказать утверждения о распределении алгебраических p-адических чисел $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ из алгебраического замыкания $\bar{Q}_p$.

Лемма 13. Если $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ упорядочены так, что

$$|w - \alpha_1|_p \le |w - \alpha_2|_p \le \cdots |w - \alpha_n|_p, \tag{18}$$

то верны следующие неравенства

$$\left|\frac{1}{j!} p^{(j)}(w)\right|_p \le |a_n|_p \left|w - \alpha_{j+1}\right|_p \cdots |w - \alpha_n|_p.$$

и поэтому при $\left|w - \alpha_j\right|_p < \left|w - \alpha_{j+1}\right|_p$ выполняется неравенство (18).

Лемма 14. Пусть $w \in \mathbb{Z}_p$ и $Q > 1$ числа $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ как в лемме 13. Положим $d_j = \Theta_{j-1} - \Theta_j, 1 \le j \le n,$ и предположим, что

$$d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_n \ge 0.$$

Тогда корни $P(w)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|w - \alpha_j\right|_p \le \delta_0^{-1} Q^{-d_j}, \qquad 0 \le j \le n.$$

Теорема. Пусть $\bar{u} = (x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ и

$$\begin{gathered} |P(x)| < c_0 H^{-v_0}, |P'(x)|_p > \delta_0 Q^{v_1} \\ |P(w)|_p < c_0 H^{-w_0}, |P'(w)|_p > \delta_0 Q^{w_1} \\ v_0 - v_1 \ge v_1 + 1,\ w_0 - w_1 \ge w_1. \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда существуют интервал I и цилиндр K, такие, что выполняется система неравенств (19), $n \ge 3$ и

$$\begin{gathered} \mu(I \times K) > cQ^{-(v_0 + w_0) + v_1 + w_1}, \\ -1 < v_1 + w_1 < \tfrac{n-2}{3}. \end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство. Предварительно докажем, что координаты вектора $\bar{u} = (x, w)$ принадлежат $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$. Из леммы 10 следует, что

$$|P(x)| < c_0 H^{-v_0}, |P'(x)| > \delta_0 Q^{v_1} . \quad (21)$$

В (21) возможны 4 случая. Они аналогичны. И поэтому будем считать, что $|P(x)| > 0,\ \ |P'(x)| < 0$.

В этом случае (21) можно переписать в виде

$$0 < |P(x)| < c_0 H^{-v_0}, \quad -\delta_0 Q^{v_1} < |P'(x)| < 0 . \quad (22)$$

Возьмем точку x, для которой верны неравенства (22) и точку

$$x_1 = x - 2c_0^{-1} \, |P'(x_1)|^{-1} . \quad (23)$$

Покажем, что в этой точке $P(x_1) < 0$. В самом деле из формулы Лагранжа

$$P(x_1) = P(x) + P'(x_1)(x_1 - x) + \frac{1}{2} P''(\xi)(x_i - x)^2, \quad (24)$$

где $x_i \leq \xi \leq x$. Из (23) и (24) имеем $P'(x_1) < 0$. Это означает, что в точках x_1 и x полином принимает значения разных знаков. Отсюда следует, что между ними находится действительный корень полинома $P(x)$. Теперь используем теорему Гензеля и получим, что корень $P(w)$ из алгебраического замыкания $\bar{Q}_p$ лежит в Q_p.

Из лемм $9 - 14$ следует, что система неравенств (17) верна для множеств B_2 точек $\bar{u} = (x, w)$ и $\mu B_2 > \frac{9}{15}(\mu_1 I \times \mu_2 K)$. Оценки сверху в (17) для значений $|P(x)|$ и $|P(w)|_p$ получаются с использованием принципа ящиков Дирихле при $v_0 + w_1 \leq n - 1$. Воспользуемся леммами10, 11 и оценками снизу для $|P'(x)|$ и $|P'(w)|$ из (20). Получим из леммы

$$|x - \alpha_1| \asymp cQ^{-v_0 + v_1}, \ |w - \gamma_1|_p \asymp cQ^{-w_0 + w_1}.$$

Так как $v_0 \geq 2v_1 + 1, w_0 \geq 2w_1$, то

$$v_1 + w_1 \leq \frac{n-2}{3}. \quad (21).$$

Из неравенства (20) можно получить значения меры Лебега-Хаара – интервалов I и цилиндров K, учитывая оценки снизу для $v_1 \geq 1$ и $w_1 \geq 1$. Теорема может быть обобщена на совместные приближения в пространстве

$$\Omega = R^k \times Q_p^l, \qquad k \geq 1, l \geq 1.$$

Заключение

Доказанная теорема улучшила результаты, известные ранее в теории диофантовых приближений. В поле p-адических чисел это новая теорема. Методы доказательства могут быть перенесены на совместные приближения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Mahler, K.*** An inequality for the discriminant of a polynomial / K. Mahler // Michigan Math. – 1964. – Vol. 11. – P. 257–262.
2. ***Sprindzuk, V. G.*** Mahler's problem in metric number theory, volume / V. G. Sprindzuk // Translations of Mathematical Monographs. Vol. 25. – American Mathematical Society, Providence, RI, 1969. – 192 p.
3. ***Спринджук, В. Г.*** Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1965. – № 2. – С. 379–436.
4. ***Bernik, V. I.*** Lengths of the intervals where integer polynomials can attain small values / V. Bernik, D. Basilyev, N. Kalosha, Z. Panteleeva // Dokl. Nats. Frfd. Nayk Belarusi. – 2024. – Vol. 68, № 8. – P. 447–453.
5. ***Beresnevich, V. V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.
6. ***Берник, В***. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.
7. ***Beresnevich V.*** Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds / V. Beresnevich, V. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis // Mosc. Math. J. – 2002. – Vol. 2. – P. 203–225.
8. ***Bernik, V. I.*** Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standards and multiplicative versions / V. I. Bernik, D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Internat. Res. Notices. – 2001. – Vol. 9. – P. 453−486.
9. ***Kleinbock, D. Y.*** Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Annals of Mathematics. – 1998. – Vol. 148, № 1. – P. 339–360.
10. ***Lewis, R.*** A formal Proof of Hensel's Lemma over the p-adic Integers. In Proceedings of the 8th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs (CPP'19) / R. Lewis. – URL: https://doi.org/10.1145/3293880.3294089 (date of access: 1.06.2025)
11. ***Badziahin, D.*** Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve [Electronic resource] / D. Badziahin. – URL: https://arxiv.org/abs/2403.17685 (date of access: 2.06.2025)
12. ***Beresnevich, V. V.*** Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze // Advances in Mathematics. – 2016. – Vol. 298. – P. 393–412.
13. ***Beresnevich, V.*** Simultanejus approximation of zero by an integral polinomials, its derivative, and small vaiues of discriminants. / V. Beresnevich // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. – 2010. – Vol. 54. – P. 26–28.
14. ***Bernik, V. I.*** Exact upper bounds for the number of the polynomials with given discriminants / V. I. Bernik, N. Budarina, F. Goetze // Lithuanian Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 57. – P. 283–293.
15. ***Bernik, V. I.*** How do discriminants of integer polynomials depend on the mutual arrangement of roots? / V. Bernik, N. Budarina, H. O'Donnell // Chebyshev collection. – 2015. – Vol. 16, № 1. – P. 153–162.
16. ***Bernik, V. I.*** Discriminants of integer polynomials in the archimedean and non-archimedean metrics / V. Bernik, N. Budarina, H. O'Donnell // Acta Mathematica Hungarica. – 2018. – Vol. 154, №2. – P. 265–278.

17. ***Budarina, N.*** New estimates for the number of integer polynomials with given discriminants / N. Budarina, V. Bernik, H. O'Donnell // Lithuanian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 60. – P. 1–8.

18. ***Koleda, D.*** On the distribution of polynomial discriminants: totally real case / *D. Koleda* // Lithuanian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 59. – P. 67–80.

19. ***Yuan, J.*** On the number of polinomials with small discriminants in the euclidean and *p*-adic metrics. / J. Yuan, N. Budarina, D. Dickinson // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28. – P. 467–476.

20. ***Bugeaud, Y.*** Approximation by algebraic numbers / Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press. – 2004. – Vol. 160. – 290 p.

21. ***Schmidt, W. M.*** Diophantine approximation / W. M. Schmidt. –Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980. – 299 p.

22. ***Bernik V. I.*** Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge : CUP, 1999. – Vol. 137. – 172 p.

Поступила в редакцию 10.06.2025 г.

Контакты: kemesh.oksana@gmeil.com (Кемеш Оксана Николаевна), korlyukova_ia@grsu.by (Корлюкова Ирина Александровна), sakovich_nv@m.msu.by (Сакович Наталья Владимировна)

Kemesh O. N., Korlyukova I. A., Sakovich N. V. **REAL INTERVALS OF THE P-ADIC CYLINDER OF LARGE LEBESGUE-HAAR MEASURE IN DIOPHANTINE APPROXIMATIONS**

The theory of Diophantine approximations arose from the theory of Dirichlet and Minkowski, in which upper bounds were proved by replacing real numbers with rational numbers and transcendental numbers with algebraic ones. Recently, there have been papers in which estimates of the Lebesgue measure of a set of such intervals have been found $I \subset \mathbb{R}$*, for which inequalities* $\left|P(x)\right| < H^{-\omega}$ *in polynomials* $P(x) \in \mathbb{Z}\left[x\right]$ *degrees* $\deg P(x) = n$ *and heights* $H = H(P)$*, equal to the maximum of the coefficient modulus* $P(x)$*. In this paper, we obtain estimates from below of Lebesgue-Haar measures of sets* $\sigma(P)$ *solutions to systems of inequalities*

$$\left|P(x)\right| < H^{-v_1}, \ \left|P(\omega)\right|_p < H^{-v_2}, \ v_i > 0, \ -1 \le v_1 + v_2 < \frac{n+1}{3}.$$

The proof is based on recent results by D. Kleinbock, G. Margulis, and V. Beresnevich in the metric theory of Diophantine approximations

Keywords: Diophantine approximations, algebraic numbers, discriminiants, *p*-adic number field, simultaneous approximations.