

ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» В КОНФИГУРАЦИЯХ (2,1) И (3,1)

И. Н. Сидоренко

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В статье рассматривается конструктивный подход к построению квадратичных систем дифференциальных уравнений, обладающих распределениями предельных циклов типов (2,1) и (3,1). Предложенный метод основан на использовании прогнозной функции Андронова–Хопфа и анализе кривых двукратных предельных циклов в пространстве параметров системы. Полученные системы демонстрируют существование предельных циклов «нормального размера». Для строгого обоснования точного числа предельных циклов применяется метод функций Дюлака–Черкаса. В работе приведены конкретные примеры квадратичных систем с различными конфигурациями особых точек, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: квадратичные системы, предельные циклы «нормального размера», бифуркация Хопфа, функция Дюлака–Черкаса, система прогноза.

Введение

Исследование предельных циклов автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка остаётся одной из центральных задач качественной теории динамических систем. Особый интерес в этом контексте представляют квадратичные системы на плоскости, которые, с одной стороны, обладают сравнительно простой аналитической структурой, а с другой – демонстрируют богатое бифуркационное поведение. Вопрос о возможном числе и конфигурации предельных циклов таких систем тесно связан с классической проблемой Гильберта и до настоящего времени далёк от окончательного разрешения.

Как следует из известных результатов, квадратичные системы могут иметь предельные циклы лишь вокруг особых точек фокусного типа, причем число таких фокусов в конечной части фазовой плоскости не превышает двух. Это существенно ограничивает возможные распределения предельных циклов и приводит к конечному списку допустимых конфигураций. К настоящему времени построены примеры систем, реализующих распределения вида $n, (n_1, n_2)$, где $n_1 + n_2 > 0$, включая случаи максимальных значений n . Однако большинство известных конструкций характеризуются наличием малоамплитудных предельных циклов, что затрудняет их как геометрическую интерпретацию, так и применение численных и конструктивных методов анализа.

© Сидоренко И. Н., 2026

В ряде предыдущих работ [1, 2, 3] были предложены методы построения квадратичных систем и систем Льенара с предельными циклами так называемого «нормального размера» [4], то есть достаточно крупными и хорошо разделёнными на фазовой плоскости.

Целью настоящей работы является распространение разработанных ранее методов прогноза и построения систем с заданным распределением предельных циклов для систем Льенара для построения квадратичных систем дифференциальных уравнений с распределениями предельных циклов типов (2,1) и (3,1), обладающих циклами «нормального размера». Основу предлагаемого подхода составляет использование прогнозной функции Андронова–Хопфа в сочетании с анализом кривых двукратных предельных циклов в пространстве параметров. Такой метод позволяет не только предсказать существование нескольких циклов, но и обеспечить их надёжное разделение на фазовой плоскости.

Для строгого обоснования точного числа предельных циклов в построенных системах применяется метод функций Дюлака–Черкаса. Особое внимание уделяется выбору минимальной степени функции Дюлака, достаточной для анализа всей области существования циклов, что существенно повышает вычислительную эффективность метода.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ [1]

В статье рассматривается каноническое семейство квадратичных систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2, \quad (1)$$

при выполнении условий:

$$a_{00} = a_{01} + a_{11} - a_{10} - a_{20} - a,$$

$$L = 2a - a_{01} - a_{10} - 2a_{20} > 0, \quad (a_{11} + a_{01} - 2a - 1)^2 - 4L < 0, \quad (2)$$

$$a_{10} = -a_{20}(x_0 + 1) - a_{01}/x_0 + a(x_0 + 1)/x_0^2, \quad x_0 \neq 0.$$

При указанных ограничениях система (1) имеет фокус $A(1, -1)$ и особую точку $B(x_0, -1/x_0)$. Кроме того, в конечной части фазовой плоскости могут существовать ещё две особые точки, абсциссы которых определяются уравнением

$$x^2 - \left(\frac{a_{01}}{a_{20}x_0} + \frac{a(x_0 + 1)}{a_{20}x_0^2} \right) x + \frac{a}{a_{20}x_0} = 0,$$

при условии, что его решения отличны от 1 и x_0 и

$$u \equiv \left(-a_{01}x_0 + a(x_0 + 1)^2 \right) - 4aa_{20}x_0^3 > 0.$$

В зависимости от значений параметров система может обладать различным числом конечных и бесконечно удалённых особых точек. В частности, при

$$0 < a < 1 \text{ и } u < 0$$

в бесконечности реализуется простое седло в направлении оси Oy , тогда как при других значениях параметра a соответствующая особая точка имеет узловой характер. Тип системы (1) будем классифицировать по совокупности конечных и бесконечных особых точек. Например, система $2F + 1S_\infty$ имеет в конечной части плоскости два узла и седло на бесконечности.

Согласно известным результатам качественной теории квадратичных систем [3], предельные циклы могут окружать только особые точки фокусного типа, причём каждая такая система допускает не более двух фокусов в конечной части плоскости. Это обстоятельство приводит к ограниченному набору возможных распределений предельных циклов, среди которых в настоящее время реализованы конфигурации:

$$(a) 1, (1,0); (b) 2, (2,0); (c) 3, (3,0); (d) (1,1); (e) (2,1); (f) (3,1). \quad (3)$$

При этом примеры с наибольшим числом циклов, как правило, соответствуют случаям с малоамплитудными предельными циклами.

В настоящей работе основной интерес представляет получение систем с распределениями $(2,1)$ и $(3,1)$, для которых предельные циклы имеют нормальный масштаб. Для этого удобно воспользоваться преобразованиями, сохраняющими число и взаимное расположение циклов в рассматриваемой области фазовой плоскости. В частности, сжатие по оси Oy вида $Y = y\omega$ позволяет нормировать вертикальный размер циклов, не нарушая их топологической структуры. Соответствующая система (1) при данном преобразовании примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega + xY, \\ \frac{dY}{dt} &= \omega^2 (a_{20}(x^2 - 1) + a_{10}(x - 1)) + \omega (a_{11}(xY + \omega) + a_{01}(Y + \omega)) + a(Y^2 - \omega^2). \end{aligned} \quad (4)$$

После последовательных замен переменных $x = 1/x$, $Y = x^{(1-a)}y - x\omega$ и масштабирования времени система (4) приводится к системе Лъенара, которая после замены x на x , y на y имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (5)$$

где $g(x) = \omega^2 P_4(x) x^{2a-3}$, $f(x) = \omega P_2(x) x^{a-2}$ $x > 0$,

$$P_4(x) = a_{20} + a_{10}x + (a_{00} - a_{11})x^2 - a_{01}x^3 + ax^4, \quad P_2(x) = a_{11} + a_{01}x - (2a + 1)x^2,$$

$$G(x) = \int_1^x g(t) dt = \tilde{P}_4(x) x^{2(a-1)} - \tilde{P}_4(1), \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt = \tilde{P}_2(x) x^{a-1} - \tilde{P}_2(1).$$

При этом особая точка $A(1, -1)$ системы (1) переходит в особую точку $A_0(1, 0)$ системы (5). При исследовании предельных циклов системы (1), окружающих эту особую точку, достаточно ограничиться полуплоскостью $x > 0$, поскольку прямая $x = 0$ является трансверсалью векторного поля системы и не пересекается замкнутыми кривыми.

СИСТЕМЫ ТИПА $2F+1S_\infty$

Рассматриваются системы (1) типа $2F+1S_\infty$. Для того чтобы особая точка $B\left(x_0, -\frac{1}{x_0}\right)$ была фокусом, необходимо и достаточно, чтобы $x_0 < 0$, $x_0 < 0$. Таким образом, изучение предельных циклов системы (1), вокруг особой точки $A(1, -1)$ сводится к изучению предельных циклов системы Лъенара (5) вокруг особой точки $A_0(1, 0)$ в полуплоскости $x > 0$.

Для систем рассматриваемого класса существенную роль играет параметр a_{11} , который при фиксированных остальных коэффициентах осуществляет вращение векторного поля. Это позволяет ввести прогнозную функцию Андронова-Хопфа $a_{11} = ANP(\xi)$ [5], связывающую значение параметра a_{11} с координатой $(\xi, 0)$ точки пересечения соответствующего предельного цикла с осью Ox .

Прогнозная функция определяется на некотором интервале (ξ_1, ξ_2) , где ξ_1, ξ_2 – абсциссы ближайших к $\xi = 1$ особых точек системы (5), $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$. Если особой точки слева от $\xi = 1$, $\xi > 0$ нет, то полагаем $\xi_1 = 0$, если ее нет справа от $\xi = 1$, то полагаем $\xi_2 = +\infty$. Прогнозная функция Андронова-Хопфа $a_{11} = ANP(\xi)$ во многих случаях дает неплохое приближение функции $a_{11} = AN(\xi)$ и определяется системой уравнений

$$AG \equiv \sum_{k=0}^4 A_k \xi^k = 0, \quad AF \equiv \sum_{k=2}^4 B_k \xi^{k-2} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_0 &= a_{20}(z^{2a-2} - 1)/(2a - 2), \quad A_1 = a_{10}(z^{2a-1} - 1)/(2a - 1), \\ A_2 &= (a_{01} - a_{10} - a_{20} - a)(z^{2a} - 1)/(2a), \quad A_3 = -a_{01}(z^{2a+1} - 1)/(2a + 1), \\ A_4 &= a(z^{2(a+1)} - 1)/(2(a + 1)), \quad B_2 = a_{11}(z^a - 1)/(a - 1), \\ B_3 &= a_{01}(z^a - 1)/a, \quad B_4 = -(2a + 1)(z^{a+1} - 1)/(a + 1), \\ z &= \eta/\xi, \quad v = z^a, \quad \xi_1 < \eta < 1, \quad 1 < \xi < \xi_2, \quad \xi_1/\xi_2 < z < 1. \end{aligned}$$

Из рассмотрения исключаются параметра $a = 0, \pm 1/2, \pm 1$, при которых формулы (6) теряют смысл.

В пространстве параметров (a_{01}, a_{11}) прогнозная функция позволяет построить кривую двукратных предельных циклов, соответствующую значениям параметров, при которых происходит слияние двух циклов в двукратный.

$$f(\xi)g(\eta) - f(\eta)g(\xi) = 0, \quad g(\xi) = P_4(\xi)\xi^{2a-3}, \quad f(\xi) = P_2(\xi)\xi^{a-2}. \quad (7)$$

Анализ взаимного расположения этой кривой и прямой негрубых фокусов позволяет выделить области существования двух или трёх предельных циклов, что соответствует количеству нулей прогнозной функции Андронова-Хопфа.

Алгоритм 1 (Построения квадратичных систем (2) с тремя предельными циклами, окружающими фокус $A(1, -1)$):

1) по заданной конфигурации особых точек выбираем такие значения параметров a_{20} , a , x_0 , которые обеспечивают существование прогнозной области с тремя предельными циклами;

2) строим прогнозную функцию Андронова-Хопфа $a_{11} = AH(\xi, a_{01}^0)$, которая определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} AG &\equiv \sum_{k=0}^4 A_k \xi^k = 0, \\ AF &\equiv \sum_{k=2}^4 B_k \xi^{k-2} = 0, \\ f(\xi)g(\eta) - f(\eta)g(\xi) &= 0, \\ g(\xi) &= P_4(\xi)\xi^{2a-3}, \\ f(\xi) &= P_2(\xi)\xi^{a-2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $A_0 = a_{20}(z^{2a-2} - 1)/(2a - 2)$, $A_1 = a_{10}(z^{2a-1} - 1)/(2a - 1)$,

$A_2 = (a_{01} - a_{10} - a_{20} - a)(z^{2a} - 1)/(2a)$, $A_3 = -a_{01}(z^{2a+1} - 1)/(2a + 1)$,

$A_4 = a(z^{2(a+1)} - 1)/(2(a + 1))$, $B_2 = a_{11}(z^a - 1)/(a - 1)$,

$B_3 = a_{01}(z^a - 1)/a$, $B_4 = -(2a + 1)(z^{a+1} - 1)/(a + 1)$,

$z = \eta/\xi$, $v = z^a$, $\xi_1 < \eta < 1$, $1 < \xi < \xi_2$, $\xi_1/\xi_2 < z < 1$.

3) определяем параметры a_{01}^0 , a_{11}^0 , для которых прогнозная функция $a_{11} = AHp(\xi)$ имеет три (или два) нуля, что соответствует количеству предельных циклов в системе (1), окружающих особую точку $A(1, -1)$;

4) проверяем справедливость прогноза.

Замечание: Прогнозная область с тремя предельными циклами существует не для всех значений параметров a , a_{20} , x_0 .

Известно [3], что система (1) типа $2F + 1S_\infty$ может иметь трехкратный фокус A лишь при $1/3 < a < 1$. Итак, выбирая значения a из указанного интервала и находя описанным выше алгоритмом систему (1), мы найдем систему с тремя циклами вокруг фокуса $A(1, -1)$, для проверки существования хотя бы одного предельного цикла вокруг фокуса $B(x_0, -1/x_0)$ достаточно проверить устойчивость этой особой точки, если фокус устойчив и траектории системы (1) пересекают трансверсаль $x = 0$ при увеличении t , выходя из области $x < 0$, заключаем, что система (2) имеет, по крайней мере, один предельный цикл вокруг фокуса B .

Для нахождения квадратичных систем (1) с распределением (2,1) предельных циклов поступаем как и в случае распределения (3,1), только необходимо искать область с двумя предельными циклами. Эту область можно найти двумя способами. Первый опирается на тот факт, что область с двумя предельными циклами является смежной к области с тремя предельными циклами. Второй способ заключается в том, что область с тремя предельными циклами существует не при всех значениях параметров, выбирая параметры таким образом, чтобы у кривой двукратных предельных циклов не существовала точки возврата. Тогда искомая область с двумя предельными циклами расположена между кривой двукратных предельных циклов и прямой негрубости фокуса $A(1, -1)$.

Рассмотрим систему (1) с конфигурацией $2F + 1S_\infty$ особых точек, имеющую три предельных цикла вокруг фокуса $A(1, -1)$. Так как она имеет единственную особую точку в бесконечности – седло в направлении оси Oy , то выполнены условия $0 < a < 1$, $a_{20} < 0$. Из анализа фокусных величин негрубого фокуса $A(1, -1)$ [2] следует, что система (1) при выполнении указанных условий может иметь трехкратный фокус лишь при $1/3 < a < 1$ (как показывает практика $9/23 < a < 1$). Исследования [1, 3, 5] показали, что точка возврата прогнозной кривой двукратных предельных циклов, соответствующая трехкратному предельному циклу, зависит также и от параметров a_{20} , x_0 . Так, например, при $x_0 = -1$ для любого значения a существует некоторое значение параметра a_{20}^0 , такое, что при всех $a_{20} < a_{20}^0$ у прогнозной кривой двукратных предельных циклов не существует точки возврата, т. е. при таких значениях параметров a , x_0 , a_{20} не существует области с тремя предельными циклами.

Отметим также, что при больших по модулю отрицательных значениях a_{20} предельные циклы системы приобретают форму правильных окружностей, в то время как при меньших по модулю отрицательных значениях параметра a_{20} они всё более напоминают релаксационные циклы (вытянутые по горизонтали и приплюснутые по вертикали).

ПРИМЕРЫ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ (3,1) ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Воспользуемся алгоритмом 1 и построим квадратичные системы (1).

Пример 1. Выберем $a = 18/23$, $x_0 = -4$. Выберем $a_{20} = -40$, далее поступая по описанному выше алгоритму 1, строим область трех предельных циклов (рисунок 1).

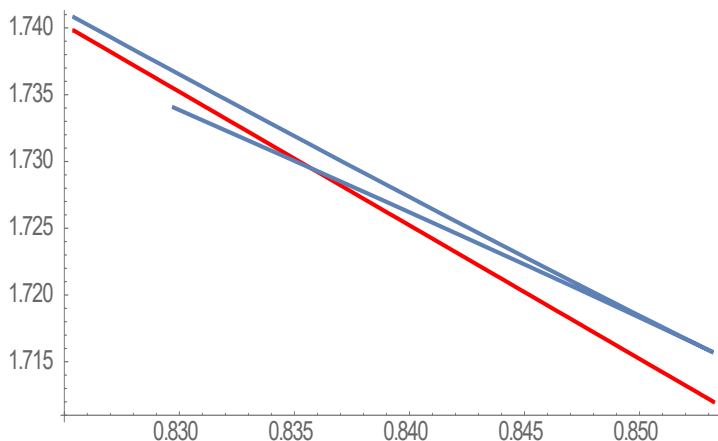


Рисунок 1 – Прогнозная область с тремя предельными циклами

Далее выбираем значения параметров a_{01} , a_{11} , таким образом, чтобы прогнозная функция Андронова-Хопфа (рисунок 2) имела три нуля. В нашем случае можно взять $a_{01} = 0.835$, $a_{11} = 1.73005$.

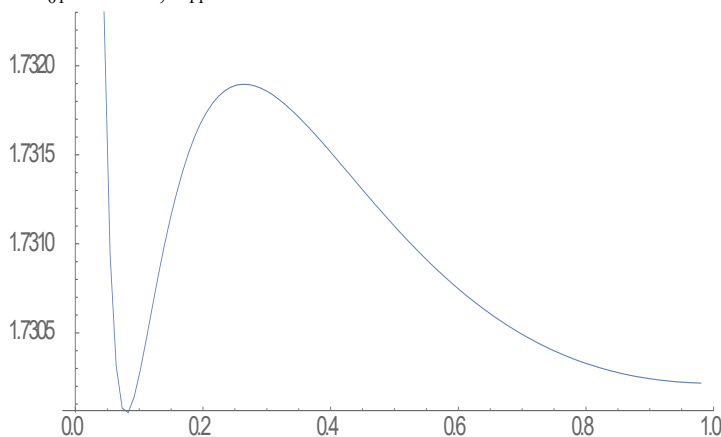


Рисунок 2 – Прогнозная функция Андронова-Хопфа

Учитывая, что фокус $B(-3, 1/3)$ системы (1) с выбранными параметрами устойчив, а ее траектории пересекают трансверсаль $x = 0$ при увеличении t , выходя из области $x < 0$, заключаем, что система (1) имеет по крайней мере один предельный цикл вокруг фокуса B . Итак, система (3.1) при $a = 18/23$, $a_{20} = -40$, $x_0 = -4$, $a_{01} = 0.835$, $a_{11} = 1.73005$ имеет по крайней мере три предельных цикла вокруг фокуса $A(1, -1)$ и один – вокруг фокуса $B(-3, 1/3)$.

Для обоснования точности полученной оценки построим для данной системы функцию Дюлака-Черкаса.

Теорема 1. Система (1) при $a = 18/23$, $a_{20} = -40$, $x_0 = -4$, $a_{01} = 0.835$, $a_{11} = 1.73005$ имеет три предельных цикла вокруг фокуса $A(1, -1)$ и один – вокруг фокуса $B(-3, 1/3)$.

Доказательство. Обоснование теоремы проведем при помощи построения функции Дюлака, для этого перейдем от системы (1) с заданными значениями параметров к системе Льенара (5), чтобы нормировать предельные циклы по их длине вдоль оси Oy , введем замену $y = Yw$, выбрав $w = 1/\sqrt{a_{20}(x_0 - 1)}$, получим

$$g(\xi) = -\frac{1}{4\xi^{31/24}} - \frac{41393677}{82800000\xi^{8/23}} + \frac{31042073\xi^{15/23}}{41400000} - \frac{367\xi^{38/23}}{400000} + \frac{19\xi^{61/23}}{18400},$$

$$f(\xi) = \frac{191837}{2000000\sqrt{2}}\xi^{-27/23} + \frac{367}{1000\sqrt{2}}\xi^{-4/23} - \frac{61}{460\sqrt{2}}\xi^{19/23}.$$

На отрезке $\xi \in I = [0.1; 2.5]$ при $k = -3.5$, $n=12$ ищем функцию $\Phi(\xi, C)$.

Она может иметь острый экстремум на отрезке $[1.95, 2.05]$. Чтобы избежать отрицательных значений функции на этом отрезке, необходимо выбрать на нем более частую сетку. Выберем на каждом из промежутков $[0.1; 1.95]$, $[1.95; 2.05]$, $[2.05; 2.5]$ равномерную сетку, разбив их соответственно на 500, 300 и 300 равных частей.

На полученной сетке узлов $\xi_i \in I$, $i = \overline{1, 1101}$ ищем решение задачи оптимизации для функции $\Phi(\xi, C) = 10^4 \xi^{71/23} \Phi(\xi, C)$

$$\Phi(\xi_i, C) \geq L, \quad L \rightarrow \max, \quad |C_j| \leq 1, \quad i = \overline{1, 1101}, \quad j = \overline{1, 12} \quad (9)$$

Решение задачи (9) (C^*, L^*) существует, при этом $L^* \approx 0.00011 > 0$. Теперь легко проверить, что функция $\Phi(\xi, C^*)$ положительна при $\xi > 0$ (рисунок 3), а уравнение $\Psi(\xi, Y, C^*) = 0$ определяет в этой области три овала (рисунок 4).

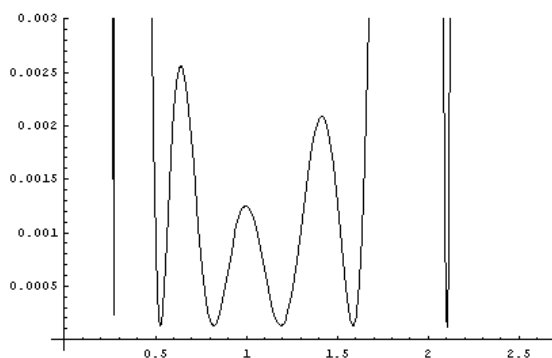


Рисунок 3 – Вид функции $\Phi(\xi, C)$

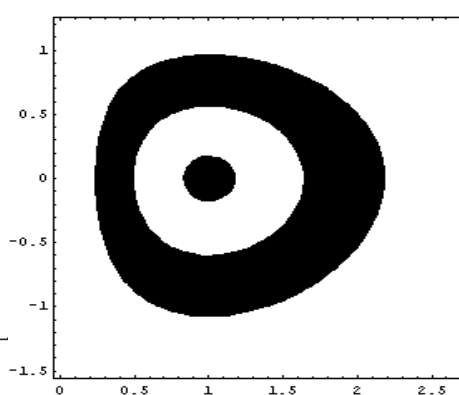


Рисунок 4 – Вид функции $\Psi(\xi, Y, C)$

Отсюда из теоремы Дюлака-Черкаса [3] следует, что соответствующая система (5), а значит и (1), имеет точно три предельных цикла в полуплоскости $\xi > 0$.

Для доказательства единственности предельного цикла системы (1) вокруг фокуса $B_0(x_0, -1/x_0)$ преобразованием $x = x_0x, y = -y/x_0$ переводим его в точку $A(1, -1)$.

В новой системе

$(a_{10}, a_{20}, a_{01}, a_{11}, a) = (10798.35, -16200, 2.202, 17.27, 19/23)$.

Для соответствующей системы (5) в области $\xi > 0$ ищем функцию $\Phi(\xi, Y, C)$ при $n = 4, k = -1$ и функции $\Phi(\xi, C) = 10^{-4} \xi^{54/23} \Phi(\xi, C)$, решая задачу (9) на равномерной сетке $\xi_i \in I, i = \overline{1, 401}$. Найдя её решение $C^*, L^* \approx 0.43 > 0$ легко доказать положительность $\Phi(\xi, C^*)$ при $\xi > 0$ и существование единственного овала уравнения. Это и доказывает единственность предельного цикла системы (1) вокруг фокуса B .

Пример 2. Система (1) при $a = 106/100, x_0 = -3, a_{01} = 47/20, a_{11} = 96/125, a_{20} = -335$ имеет по крайней три предельных цикла вокруг фокуса $A(1, -1)$ и один – вокруг фокуса $B(-3, 1/3)$ (рисунок 5).

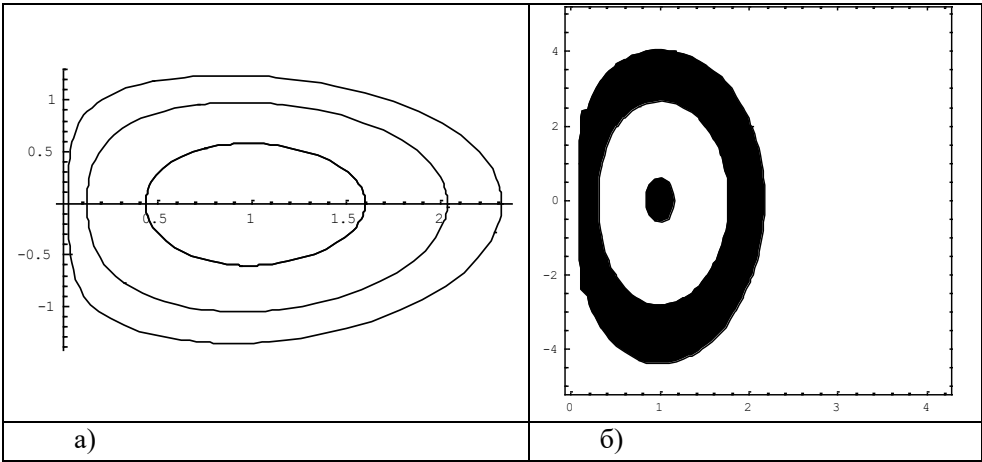


Рисунок 5 – а) Предельные циклы системы (1) пример 2
б) функция Дюлака-Черкаса системы (1) пример 2

Аналогичным образом строятся примеры квадратичных систем с распределением (2,1) предельных циклов и проводится обоснование точности полученной оценки.

Пример 2. Система (1) при $a = 10/23$, $x_0 = -3$, $a_{01} = -3.6$, $a_{11} = 5.44$, $a_{20} = -15$ имеет по крайней мере два предельных цикла вокруг фокуса $A(1, -1)$ и один – вокруг фокуса $B(-3, 1/3)$.

Пример 3. Система (1) при $a = 19/23$, $x_0 = -3$, $a_{01} = 0.72$, $a_{11} = 1.931$, $a_{20} = -200$ имеет по крайней мере два предельных цикла фокуса $A(1, -1)$ и один – вокруг фокуса $B(-3, 1/3)$. И в тоже время она в плоскости параметров a_{11} , a_{01} имеет область с тремя предельными циклами (см. пример 1).

Заключение

В настоящей работе предложен конструктивный алгоритм построения квадратичных систем дифференциальных уравнений с заданными распределениями предельных циклов типа $(2, 1)$ и $(3, 1)$. В основе метода лежит совместное использование прогнозной функции Андронова-Хопфа и анализа кривых двукратных предельных циклов в пространстве параметров, что позволяет эффективно выявлять прогнозные области существования нескольких замкнутых траекторий.

Ключевым преимуществом разработанного подхода является получение предельных циклов «нормального размера», в отличие от известных ранее примеров с малыми амплитудами.

Точность полученных оценок числа предельных циклов строго обоснована с помощью метода функций Дюлака-Черкаса. Особое внимание уделено выбору минимальной степени функции Дюлака-Черкаса, достаточной для анализа всей области существования предельных циклов, что позволяет существенно сократить затраты при практической реализации метода.

Приведенные примеры демонстрируют универсальность предложенного подхода и возможность его применения для различных конфигураций особых точек. Разработанный алгоритм может быть использован при дальнейшем исследовании квадратичных систем и систем, приводимых к системам Лъенара, а также при построении моделей прикладного характера, в которых важна реализация устойчивых автоколебаний заданной структуры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы «нормального размера» систем Лъенара, квадратичных и кубических систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 – дифференциальные уравнения / Сидоренко Иван Николаевич; Гродненский государственный университет им. Янки Купалы. – Гродно, 2010. – 26 с.
2. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости / И. Н. Сидоренко // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1, Физика, Математика, Информатика. – 2008. – № 3. – С. 63–68.
3. **Черкас, Л. А.** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков; Учреждение образования «Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы». – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.
4. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – P. 619–644.
5. **Сидоренко, И. Н.** Об ослабленной проблеме Гильберта для систем Лъенара типа $2A + 2S$ / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2023. – № 2 (62). – С. 32–40.

Поступила в редакцію 24.12.2025 г.

Контакты: sidorenkoin@gmail.com (Сидоренко Иван Николаевич)

Sidorenko I. N. CONSTRUCTION OF QUADRATIC SYSTEMS WITH LIMIT CYCLES OF “NORMAL SIZE” IN (2,1) AND (3,1) CONFIGURATIONS

The paper develops a constructive method for generating quadratic systems of differential equations with limit cycle distributions of types (2,1) and (3,1). The approach is based on the use of the predictive Andronov-Hopf function together with an analysis of curves corresponding to double limit cycles in the parameter space. A distinctive feature of the obtained systems is the presence of limit cycles of normal size, which are sufficiently large and clearly separated on the phase plane, in contrast to previously known examples characterized by small amplitudes. The exact number of limit cycles is rigorously justified by means of the Dulac-Cherkas function method. Several explicit examples of quadratic systems with different configurations of singular points are presented.

Keywords: quadratic systems, limit cycles of «normal size», Hopf bifurcation, Liénard systems, prediction system.