УДК 517.956.32

ФОРМУЛЫ РИМАНА ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ. II ЧАСТЬ[1]

Ф. Е. Ломовцев
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета
Белорусский государственный университет

В предыдущей части этой статьи методом Римана и новым методом компенсации граничного режима правой частью уравнения были получены формулы Римана единственного и устойчивого классического решения и достаточные условия корректности первой смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами. В настоящей части статьи доказана необходимость найденных требований гладкости и трех условий согласования правой части уравнения, граничного и начальных данных. Подтверждены полученные формулы Римана и критерий корректности их совпадением с известными формулами решения и критерием корректности для модельного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: первая смешанная задача, телеграфное уравнение, глобальная теорема корректности, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.

Введение

В предыдущей части настоящей статьи впервые найдены достаточные условия корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) первой смешанной задачи для линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости для классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений (теорема 1) [1]. В настоящей статье доказана необходимость найденных ранее условий корректности этой смешанной задачи. Вывод критерия корректности на правую часть телеграфного уравнения с переменными коэффициентами использует критерий корректности из [2]. С помощью вычисленной функции Римана доказано (теорема 2), что в случае модельного телеграфного уравнения эти обобщенные формулы типа Римана и критерий корректности первой смешанной задачи из теоремы 1 совпадают с уже известными результатами из статьи [3]. В ней ранее автором настоящей работы были получены явные формулы классического (дважды непрерывно дифференцируемого) решения, часть критерия корректности и доказана теорема существования единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Результаты из [3] и настоящей работы нами распространены "методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны" из [4] на первую смешанную задачу для модельного и общего телеграфных уравнений с переменными коэффициентами в полуполосе плоскости в работах [5, 6]. Выведены обобщенные формулы типа Римана ее единственного и

[1] Работа поддержана БРФФИ РБ: проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021г.

устойчивого классического решения и установлен критерий (необходимые и достаточные условия) ее корректности во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений Этот критерий корректности состоит из требований гладкости на правую часть уравнения, граничное и начальные данные и трех условий согласования граничного режима с начальными условиями и телеграфным уравнением.

В работе автора [3] обобщались результаты кандидатской диссертации [7], в которой первая смешанная задача для однородного уравнения в полуполосе плоскости, периодическими продолжениями исходных данных задачи и коэффициентов уравнения при соответствующих предположениях на них заменяется задачей Коши для него в верхней полуплоскости. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для более общего $(a_1 \neq a_2)$ волнового уравнения на отрезке, но с постоянными коэффициентами имеется в статье [8]. В этой статье введено понятие глобальных теорем корректности линейных краевых задач и с помощью леммы Цорна доказана теорема 1 о существовании их глобальных теорем корректности. Глобальными теоремами называются теоремы корректности краевых задач с критериями (необходимыми и достаточными условиями) их корректности по Адамару. Эта теорема 1 утверждает: каждая корректно поставленная линейная краевая задача для уравнения в частных производных имеет глобальную теорему корректной разрешимости по Адамару в некоторой паре локально выпуклых топологических векторных пространств.

Результаты настоящей работы обобщают работы [9–13] с первой смешанной задачей для простейшего $(a = const > 0,\, b = c = 0,\, q = q(x,t))$ телеграфного уравнения (1). В диссертации [9] установлены необходимые и достаточные условия на начальные данные и только достаточные условия на правую часть уравнения для классического решения первой смешанной задачи. Согласно работам [8, 10] необходимые условия $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ t \in [0,T]$, на правую часть $f(x,t) \in C(\overline{Q})$ уравнения колебаний струны из [9] являются лишь одними из достаточных (необязательных) условий корректности первой смешанной задачи. Здесь одними из необходимых (обязательных) условий служат условия согласования $f(0,0) = f(\pi,0) = 0$ правой части f с нулевыми начальными и граничными данными. В статьях [11, 12] для волнового уравнения найдена формула и необходимые и достаточные условия на начальные данные для обобщенного (почти классического) решения смешанной задачи. Это обобщенное (один раз непрерывно дифференцируемое) решение удовлетворяет волновому уравнению почти всюду по x и t. Секвенциальным и аксиоматическим методами А. П. Хромова в работе [13] И. С. Ломов доказал существование такого обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения с комплексным суммируемым потенциалом $q(x,t)$ при нелокальном граничном условии со значением решения во внутренней точке отрезка.

Основная часть

Найдены формулы Римана и достаточные условия корректности задачи [1]

$$\mathcal{L}u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) +$$

$$+q(x,t)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x),\ \ x > 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0, \tag{3}$$

где коэффициенты уравнения a, b, c, q – вещественные функции и исходные данные задачи f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ – плоскость и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Из постановки смешанной задачи и определения 1 классических решений вытекают следующие необходимые условия гладкости данных

$$f \in C(G_\infty),\ \varphi \in C^2[0,+\infty[,\ \psi \in C^1[0,+\infty[,\ \mu \in C^2[0,+\infty[. \quad (4)$$

Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3), первой и второй производных по t от граничного режима (3) с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = t = 0$ выводим необходимые условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0),\ \psi(0) = \mu'(0),$$

$$S \equiv f(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) - b(0,0)\psi(0) - c(0,0)\varphi'(0) - q(0,0)\varphi(0) = \mu''(0). \quad (5)$$

Уравнение (1) на G_∞ имеет характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt,\ i = 1, 2, \quad (6)$$

которым в плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t соответствуют два различных семейства неявных характеристик $g_i(x,t) = C_i,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2$ [3]. Если коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0,\ (x,t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристике $g_1(x,t) = C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$, строго убывает, а на характеристике $g_2(x,t) = C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$, строго возрастает вместе с ростом x в правой плоскости Oxt. Поэтому у неявных функций $y_i = g_i(x,t),\ x \geq 0,\ t \geq 0$ существуют явные строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i, t\},\ t \geq 0$, и $t = h^{(i)}[x, y_i],\ x \geq 0$, $i = 1, 2$, для которых на G_∞ верны следующие тождества обращения из [3]:

$$g_i(h_i\{y_i,t\},t) = y_i, t \geq 0,\ h_i\{g_i(x,t),t\} = x, x \geq 0,\ i = 1,2, \quad (7)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, x \geq 0,\ h^{(i)}[x, g_i(x,t)] = t, t \geq 0,\ i = 1,2, \quad (8)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, x \geq 0,\ h^{(i)}[h_i\{y_i,t\}, y_i] = t, t \geq 0,\ i = 1,2. \quad (9)$$

Если коэффициент $a \in C^2(G_\infty)$, то функции $g_i, h_i, h^{(i)}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x, t, y_i, $i = 1, 2$, на G_∞ ввиду статьи [3].

Характеристика $x = a_1 t$ делит четверть плоскости G_∞ на множества

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) > g_2(0,0)\},\ G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) \leq g_2(0,0)\}.$$

Если в уравнении (1) продолжить функцию $a(x,t)$ четным образом на $x < 0$, то характеристики $g_i(x,t) = C_i,\ i = 1, 2$, будут заданы на верхней полуплоскости G плоскости Oxt.

В настоящей статье мы используем и продолжаем нумерацию формул из [1]. Обобщенные формулы Римана классического (дважды непрерывно дифференцируемого) решения поставленной смешанной задачи содержит

Теорема 1 [1, 14]. *Пусть коэффициенты* $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$. *Первая смешанная задача (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* φ, ψ, f, μ *классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости (4),*

$$H_i(x,t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1,\ 2 \qquad (10)$$

и условия согласования (5). Классическим решением первой смешанной задачи (1)–(3) в $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$u_-(x,t) = \frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0) + (auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)}{2a(x,t)} +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} [\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau;x,t)ds,\ (x,t) \in G_-, \qquad (11)$$

$$u_+(x,t) = \frac{(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0) - (auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\},0)}{2a(x,t)} +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} [\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;|x|,t)ds + \mu(t) -$$

$$-\frac{1}{2a(0,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}} \breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;0,t)ds,\ (x,t) \in G_+, \qquad (12)$$

где функции $\breve{f}(x,t) = f(x,t) - f_\mu(x,t) + f^{(0)}(x,t)$, $f_\mu(x,t) = \mathcal{L}\mu(t)$, $f^{(0)}(x,t)$ *из решения системы (36) интегрального уравнения Вольтерра второго рода и линейного алгебраического уравнения, а функции Римана* $v(s,\tau) = v(s,\tau;x,t)$ *– классические решения задач Гурса (19), (22) в* G_- *и (29), (30) в* G_+.

Доказательство. Достаточность теоремы 1 строго доказана в [1]. Это доказательство достаточности можно дополнить следующими пояснениями.

Критерий корректности по Адамару смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний струны при нехарактеристических первых косых производных в нестационарных (при зависящих от времени коэффициентах) граничных условиях на полупрямой и ограниченном отрезке имеются в [15].

В статье [1] дифференциальный оператор $\mathcal{M}$ уравнений (19), (29) задач Гурса является формально сопряженным оператором к дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ уравнения (1) в смысле распределений Шварца $\mathcal{D}'(G_-)$ [16, 17].

При коэффициентах $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ гладкости (4), (10) на φ, ψ, f достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости решения (28) задачи Коши (25), (26) в [1] и первых трех слагаемых из (12) на G_+ при $x \geq 0$, так как функция Римана $\hat{v}$ дважды непрерывно дифференцируема на G_+ при $x \geq 0$ [18, с. 129–135].

Формулы Римана и критерий корректности задачи Коши для телеграфного уравнения с переменными коэффициентами из работы [19] используется в [1] для обоснования существования классических решений вспомогательных задач Коши. Существование единственного классического решения $\breve{u}$ задачи (1)–(3) на G_∞ и G_+ взято из теоремы 2 статьи [3], где для него обоснована достаточность гладкости на φ, ψ, f, μ из (4), (10). В доказательстве теоремы 2 из [3] о корректности задачи (1)–(3) для уравнения (1) используются теорема 1 из [3] для модельного телеграфного уравнения (см. ниже (41)), обобщение метода продолжения по параметру Шаудера [20–22] и теоремы повышения гладкости сильных решений из [22]. Метод продолжения по параметру основан на том, что линейное общее телеграфное уравнение (1) отличается от линейного модельного телеграфного уравнения (41) младшими членами, т. е. слагаемыми с первыми частными производными u_t, u_x и u.

В доказательстве теоремы 2 статьи [3] единственность классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) на G_∞ обоснована от противного с помощью энергетического неравенства для ее обобщенного сильного решения [22] (см. замечание 3).

Устойчивость классического решения u_- вида (11) на G_- и u_+ вида (12) на G_+ по φ, ψ, μ, f первой смешанной задачи (1)–(3) подробно описана в [2]. При любом $0 < T < +\infty$ решение (11) непрерывно зависит в банаховом пространстве $X^{(1)} = C^2(G_T^-)$ от φ, ψ, f в декартовом произведении $Y^{(1)}$ банаховых пространств $C^2[0,+\infty[\times C^1[0,+\infty[\times C(G_T^-)$, где множества

$G_T^- = G_T \cap G_-$, $G_T = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$, с нормами из [2]:

$$\| u_-(x,t) \|_{C^2(G_T^-)} = \sup_{(x,t)\in G_T^-} \sum_{0 \leq p+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{p+j} u(x,t)}{\partial^p x \partial^j t} \right|,$$

$$\| \varphi(x) \|_{C^2[0,+\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^{2} \left| \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right|, \| \psi(x) \|_{C^1[0,+\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^{1} \left| \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right|,$$

$$\| f(x,t) \|_{C(G_T^-)} = \sup_{(x,t)\in G_T^-} \left(| f(x,t) | + \sum_{i=1}^{2} \sum_{0 \leq p+j \leq 1} \left| \frac{\partial^{p+j} H_i(x,t)}{\partial^p x \partial^j t} \right| \right). \tag{38}$$

При любом $0 < T < +\infty$ решение (12) непрерывно зависит в банаховом пространстве $X^{(2)} = C^2(G_T^+)$ от φ, ψ, μ, f в декартовом произведении $Y^{(2)}$ банаховых пространств

$C^2[0,\Upsilon_T]\times C^1[0,\Upsilon_T]\times C^2[0,T]\times C(G^T)$, где множества $G_T^+ = G^T \cap G_+$, $\quad G^T = \{(x,t)\in G_\infty \ : \ g_1(x,t)\le g_1(h_2\{g_2(0,0),T\},T), \quad 0\le t\le T\}$ и $\Upsilon_T = h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),T\},T),0\}$, с нормами из [2]:

$$\| u_+(x,t)\|_{C^2(G_T^+)} = \max_{(x,t)\in G_T^+}\sum_{0\le p+j\le 2}\left|\frac{\partial^{p+j}u(x,t)}{\partial^p x\partial^j t}\right|, \| \varphi(x)\|_{C^2[0,\Upsilon_T]} = \max_{0\le x\le \Upsilon_T}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\right|,$$

$$\| \psi(x)\|_{C^1[0,\Upsilon_T]} = \max_{0\le x\le \Upsilon_T}\sum_{m=0}^{1}\left|\frac{d^m\psi(x)}{dx^m}\right|, \| \mu(t)\|_{C^2[0,T]} = \max_{0\le t\le T}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{d^m\mu(t)}{dt^m}\right|,$$

$$\| f(x,t)\|_{C(G^T)} = \max_{(x,t)\in G^T}\left(| f(x,t)| + \sum_{i=1}^{2}\sum_{0\le p+j\le 1}\left|\frac{\partial^{p+j}H_i(x,t)}{\partial^p x\partial^j t}\right|\right). \tag{39}$$

Устойчивость решения $u\in C^2(G_\infty)$ по данным φ, ψ, μ, f также вытекает из его существования и единственности по теореме Банаха о замкнутом графике или теореме Банаха об открытом отображении.

Необходимость требований гладкости (4) и условий согласования (5) установлена нами перед теоремой 1. В статьях [2, 3] доказана необходимость (обязательность) гладкости (10) для дважды непрерывной дифференцируемости интеграла $F(x,t)$, которым в теореме 1 становятся интегралы в третьих слагаемых из (11) и (12) при функциях $v\equiv a\equiv 1$ на G_∞. Дважды непрерывная дифференцируемость интегралов из (11) и (12) не зависит от непрерывно дифференцируемых решений $v\in C^1(G_\infty\cap\Delta MPQ)$ задач Гурса (19), (22) и (29), (30) также, как от дважды непрерывно дифференцируемых коэффициента $a\in C^2(G_\infty)$, $a(x,t)\ge a_0>0$, $(x,t)\in G_\infty$ и функций g_i, h_i, $h^{(i)}$, $i=1, 2$, ниже в замечании 2. Доказательство того, что требования (10) гарантируют дважды непрерывную дифференцируемость интеграла $F\in C^2(G_\infty)$ имеется в [2, 3]. Поэтому необходимость гладкости (10) следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $F\in C^2(G_\infty)$ [2; 3; 15, с. 51]. Доказательство теоремы 1 завершено.

Для непрерывной правой части $f\in C[0,+\infty[$, зависящей только от x или t, требования гладкости (10) всегда выполняются [2, 3, 15].

Следствие 1. *Если непрерывная правая часть f зависит только от x или t, то утверждение теоремы 1 справедливо без требований (10).*

Важно отметить, что существование на G_∞ разрывной функции f, при которой интеграл $F(x,t)$, указанный в доказательстве необходимости теоремы 1, не будет классическим решением уравнения (41) на G_∞, не противоречит работам [2, 3], потому что согласно уравнению (41) его правая часть f должна быть непрерывной на G_∞. Иначе говоря, очевидное утверждение: «Если $F(x,t)$ – классическое решение уравнения (41) на G_∞, то f непрерывна на G_∞» равносильно его отрицанию: «Если f разрывна на G_∞, то $F(x,t)$ – неклассическое решение уравнения (41) на G_∞».

Исследования автора минимальной гладкости правой части f модельного телеграфного уравнения (см. ниже уравнение (41)) для дважды непрерывной дифференцируемости его частного решения $F(x,t)$ в работах [2, 3] указывают на то, что требования гладкости (10) на G_∞ выполняются для непрерывно дифференцируемых $f \in C^1(G_\infty)$ и даже тех непрерывных $f(x,t) \in C(G_\infty)$, у которых частные производные интегралов $\partial H_i(x,t)/\partial x$ по x или $\partial H_i(x,t)/\partial t$ по t, $i=1,2$ из (10) непрерывны на G_∞ (см. следствие 2).

Поэтому такая же справедливость гладкости (10) распространяется на $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, функции $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2(G_\infty)$, $i=1,2$ и функцию Римана $v(s,\tau) \in C^2(G_\infty)$.

Замечание 2. В теореме 1 для непрерывной правой части $f \in C(G_\infty)$ гладкость (10) равносильна гладкости [2, 3]:

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty),\ i=1,2. \tag{40}$$

Следствие 2. *В теореме 1 принадлежность интегралов (10) и интегралов (40) из предыдущего замечания 1 множеству* $C^1(G_\infty)$ *равносильна их принадлежности множеству* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ *или множеству* $C^{(1,0)}(G_\infty)$, *где* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ $(C^{(1,0)}(G_\infty))$ – *множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по* x *и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по* t *функций в первой четверти плоскости* G_∞ [2, 3].

Замечание 3. Используя соответственно четность и нечетность по x продолжений коэффициентов $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ уравнения (1) и дополнительные предположения $a_x(0,t)=0$, $b_x(0,t)=0$, $c(0,t)=0$, $q_x(0,t)=0$, $t \ge 0$, можно аналогичными рассуждениями из доказательства теоремы 1 показать, что $\hat{a} \in C^2(G)$, $\hat{b} \in C^1(G)$, $\tilde{c} \in C^1(G)$, $\hat{q} \in C^1(G)$. При таких коэффициентах вспомогательная задача Коши (25), (26) имеет единственное классическое решение $\breve{u} \in C^2(G)$ и задача Гурса (29), (30) – функцию Римана $\hat{v} \in C^2(G)$. Такая гладкость функций $\breve{u}$, $\hat{v}$ избыточна для решения $u \in C^2(G_\infty)$ задачи (1) – (3) в первой четверти плоскости G_∞.

Из теоремы 1 выведем классическое решение и критерий корректности первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения из [3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - \\ -a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = \tilde{f}(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty,\end{aligned} \tag{41}$$

при начальных условиях (2) и граничном режиме (3).

Из постановки смешанной задачи (41), (2), (3) и определения 1 из [3] следуют необходимые условия гладкости (4) данных и условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0),\ \ \psi(0) = \mu'(0),$$

$$\tilde{S} \equiv \tilde{f}(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) + a^{-1}(0,0)a_t(0,0)\psi(0) + a(0,0)a_x(0,0)\varphi'(0) = \mu''(0). \tag{42}$$

Найдем формулы классического решения и критерий корректности по Адамару первой смешанной задачи (41), (2), (3) из формул Римана (11), (12) и критерия корректности первой смешанной задачи (1)–(3) в теореме 1.

Теорема 2 [3]. *Пусть* $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. *Первая смешанная задача (41), (2), (3) в* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* $\varphi, \psi, \tilde{f}, \mu$ *классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *тогда и только тогда, когда верны требования гладкости (4), (10) при* $f = \tilde{f}$ *и условия согласования (42). Классическим решением задачи (41), (2), (3) в* $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$\hat{u}_-(x,t) = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x,t),0\})}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}d\nu +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(s,\tau)}{a(s,\tau)}ds,\ (x,t) \in G_-, \tag{43}$$

$$\hat{u}_+(x,t) = \frac{\varphi(h_1\{g_1(x,t),0\}) - \varphi(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\})}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}d\nu + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds + \mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)]) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tau \int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds,\ (x,t) \in G_+. \tag{44}$$

Доказательство. Сначала выведем формулы (43), (44) формального решения задачи (41), (2), (3) на G_- и G_+ из формул Римана (11), (12).

1). Множество G_-. Для модельного телеграфного уравнения (41) решением $\hat{v} \in C^2(G_\infty)$, $C(G)$, $C^2(G \setminus G_\infty)$ задач Гурса (19), (22) на G_- и (29), (30) на G_+ из теоремы 1 служит функция Римана из [23]:

$$\hat{v}(s,\tau) = v(|s|,\tau) = \hat{v}(s,\tau;x,t) = a(|x|,t) / a(|s|,\tau),\ (s,\tau) \in G.$$

В этом также можно убедиться подстановкой этой функции Римана в телеграфные уравнения (19), (29) и условия Гурса (22), (30) при коэффициентах $\hat{b}(s,\tau) = -\hat{a}^{-1}(s,\tau)\hat{a}_\tau(s,\tau)$, $\tilde{c}(s,\tau) = -\hat{a}(s,\tau)\hat{a}_s(s,\tau)$ и $\hat{q}(s,\tau) = 0$. Других функций Римана этих задач Гурса не существует, так как решение каждой задачи Гурса единственно и задача Гурса (19), (22) на G_- – частный случай задачи Гурса (29), (30) на верхней полуплоскости G.

Подставляем функцию Римана $v(s,\tau) = a(|x|,t) / a(|s|,\tau)$ в решение (11):

$$\frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0)+(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)}{2a(x,t)}=$$

$$=\frac{1}{2a(x,t)}\left[a(x,t)\frac{a(s,\tau)}{a(s,\tau)}u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x,t),0\}}+a(x,t)\frac{a(s,\tau)}{a(s,\tau)}u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x,t),0\}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x,t),0\}}+u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x,t),0\}}\right]=\frac{\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\})+\varphi(h_1\{g_1(x,t),0\})}{2},$$

$$\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\psi(s)v(s,0)ds=\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\psi(s)\frac{a(x,t)}{a(s,0)}ds=\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\frac{\psi(s)}{a(s,0)}ds,$$

$$\frac{-1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}[\varphi(s)v_\tau(s,0)-b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds=$$

$$=\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\varphi(s)\left[\frac{a(x,t)a_\tau(s,0)}{a^2(s,0)}-\frac{a^{-1}(s,0)a_\tau(s,0)a(x,t)}{a(s,0)}\right]ds=0,$$

$$\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\tilde{f}(s,\tau)v(s,\tau)ds=\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\tilde{f}(s,\tau)\frac{a(x,t)}{a(s,\tau)}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{\tilde{f}(s,\tau)}{a(s,\tau)}ds,\ (x,t)\in G_-. \tag{45}$$

Это указывает на то, что решение (11) становится решением (43) на G_-.

2). Множество G_+. Вывод первых трех слагаемых решения (44) из формулы Римана (12) аналогичен равенствам (45). Согласно нашему выводу формулы Римана (12) классического решения u_+ задачи (1)–(3) на G_+ его последний интеграл, равный значению предпоследнего двойного интеграла по ΔMPG при $x=0$, имеет величину

$$\mathfrak{U}(x,t)\equiv-\frac{1}{2a(0,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}}\tilde{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;0,t)ds=$$

$$=-\frac{1}{2a(0,t)}\left(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\tilde{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;x,t)ds\right)\Bigg|_{x=0},\ (x,t)\in G_+,$$

так как в (12) функция $\breve{f}=\tilde{f}$, поскольку в [3] решение задачи (41), (2), (3) получено методом характеристик, а не нашим методом компенсации правой частью уравнения. Подставляем функцию $v(|s|,\tau)=a(|x|,t)/a(|s|,\tau)$ и меняем порядок интегрирования

$$-\frac{a(0,t)}{2a(0,t)}\left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds\right)\Bigg|_{x=0}.$$

Сначала во внешнем интеграле делаем замену переменной интегрирования

$$\tau = h^{(2)}[0,g_2(x,\tau)],\ \tau \geq 0, \tag{46}$$

и приходим к повторному двойному интегралу

$$\mathfrak{U}(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tilde{\tau}\left(\int\limits_{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds\right)\Bigg|_{x=0}, \tag{47}$$

так как внешний нижний предел интегрирования равен $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0,\ g_2(x,\tau)]|_{x=0,\tau=0} = \tau|_{\tau=0} = 0$ по второму тождеству обращения из (8) при $i = 2$, внешний верхний предел интегрирования равен $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0,\ g_2(x,\tau)]|_{\tau=t} = h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$ и из тождества $h^{(2)}[0,g_2(x,\tau)]|_{x=0} = \tau,\ \tau \geq 0$, в (8) при $i = 2$ следует равенство $d\tilde{\tau} = (\partial h^{(2)}[0,\ g_2(x,\tau)]/\partial\tau)|_{x=0}\, d\tau = d\tau$. Здесь производная по τ и след при $x = 0$ коммутируют. В функции $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$ уже $x = 0$, так как к функции $y_2 = g_2(x,t)$ обратной при $x = 0$ является функция

$$t = h^{(2)}[x,y_2]|_{x=0} = h^{(2)}[0,y_2] = h^{(2)}[0,g_2(x,t)],\ t \geq 0.$$

Итак, после замены (46) в интеграле $\mathfrak{U}(x,t)$ верхний предел интегрирования t внешнего повторного интеграла при $x = 0$ стал равным $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$ в (47). Поэтому во внутреннем повторном интеграле из $\mathfrak{U}(x,t)$ замена (46) при $x = 0$ равносильна замене t на $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$. Кроме того, во внутреннем повторном интеграле из (47) замена (46) при $x = 0$ равносильна замене $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0,g_2(x,\tau)]|_{x=0} = \tau,\ \tau \geq 0$, по второй формуле обращения из (8) при $i = 2$. В результате этих замен находим

$$\mathfrak{U}(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tilde{\tau} \int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tilde{\tau})}{a(|s|,\tilde{\tau})}ds,\ (x,t) \in G_+, \tag{48}$$

так как по первой формуле обращения из (8) при $i = 2$ пределы интегрирования равны

$$h_2\{g_2(0,t),\tau\} = h_2\{g_2(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tilde{\tau}\} = h_2\{g_2(x,t),\tilde{\tau}\},$$

$$h_1\{g_1(0,t),\tau\} = h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tilde{\tau}\}.$$

В граничном данном $\mu(t)$ формулы (12) можно тоже заменить t на $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$, т. е. $\mu(t)$ на $\mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])$. Граничное данное $\mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])$ для $\mu(t) \in C^2[0,+\infty[$ и интеграл (48) служат классическими решениями однородного модельного телеграфного уравнения (41) на G_+, так как они имеют вид слагаемого $\mathfrak{F}_2(g_2(x,t)),\ \forall \mathfrak{F}_2 \in C^2(\mathbb{R})$, общего интеграла уравнения (41) при $\tilde{f} = 0$ на G_∞ из [2, 3].

Из теоремы 1 следует дважды непрерывная дифференцируемость найденных из общих формул Римана (11) и (12) решений (43) на G_-, (44) на G_+ и (43), (44) на критической характеристике $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ для первой смешанной задачи (41), (2), (3), а также критерий ее корректности. Эта гладкость решений (43), (44) и критерий корректности задачи (41), (2), (3) подробно и конструктивно исследованы в [3]. Теорема 2 доказана.

Замечание 4. При доказательстве теорем 1 и 2 в [3] была показана только достаточность требований гладкости (10). Их необходимость также подтверждает работа автора [2]. В диссертации [7] нет формулы (44) решения задачи (41), (2), (3) на G_+.

Следствие 3. *Если непрерывная правая часть $\tilde{f}$ зависит только от x или t, то утверждение теоремы 2 справедливо без требований (10).*

Для непрерывной правой части $\tilde{f} \in C[0,+\infty[$, зависящей только от x или t, требования гладкости (10) всегда выполняются [2, 3, 15].

Замечание 5. В теореме 2, где $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, для зависящей от x и t и непрерывной правой части $\tilde{f} \in C(G_\infty)$ гладкость (10) равносильна гладкости (40) из нашего замечания 1 [2, 3, 15].

Следствие 4. *В теореме 2 принадлежность интегралов (10) и равносильных интегралов (40) множеству $C^1(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множеству $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или $C^{(1,0)}(G_\infty)$, где $C^{(0,1)}(G_\infty)$ $(C^{(1,0)}(G_\infty))$ – множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по x и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по t функций в первой четверти плоскости G_∞ [2, 3, 15].*

Заключение

Показана необходимость требований гладкости и условий согласования (4), (5), (40) для формул Римана (11), (12) единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) для общего линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Эти формулы Римана содержат неявные функции характеристик уравнения (1). Из формул Римана (11), (12) и критерия корректности (4), (5), (40) выведены уже известные формулы классического решения (43), (44) и критерий корректности (4), (40), (42) первой смешанной задачи (41), (2), (3) для неоднородного модельного телеграфного уравнения со специальными переменными коэффициентами в первой четверти плоскости, которые ранее были установлены автором в статье [3]. Это служит подтверждением справедливости полученных формул Римана (11), (12) и критерия корректности (4), (5), (40) настоящей работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. I часть / Ф. Е. Ломовцев // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2023. – № 2 (62). – С. 16–31.

2. ***Lomovtsev, F. E.*** The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Труды 10-го междунар. науч. семинара «AMADE-2021». – БГУ – ИВЦ Минфина, 2022. – С. 43–53.

3. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.

4. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Тезисы доклада Шестых Богдановских чтений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, 7–10 дек. 2015 г. – 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.

5. ***Lomovtsev, F. E.*** Global Correctness Theorem of the First Mixed Problem for the Model Telegraph Equation at the Rate a(x,t) in the Half-Strip of the Plane / F. E. Lomovtsev // Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianky Kupaly. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka. Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne. – 2021. – Vol. 11, № 3. – P. 13–26.

6. ***Lomovtsev, F. E.*** Global Correctness Theorem to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Segment / F. E. Lomovtsev // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 62–73.

7. ***Барановская, С. Н.*** О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / С. Н. Барановская. – Минск, 1991. – 59 с.

8. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости / Ф. Е. Ломовцев // Веснік Гродзенскага дзяржаунага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 68–82.

9. ***Чернятин, В. А.*** Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / В. А. Чернятин ; АН УССР, Ин-т математики. – Киев, 1990. – 27 с.

10. ***Корнев, В. В.*** Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 403–412.

11. ***Хромов, А. П.*** Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / А. П. Хромов, В. В. Корнев // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 484, № 1. – С. 18–20.

12. ***Хромов, А. П.*** Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А. П. Хромов // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 717–731.

13. ***Ломов, И. С.*** Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы / И. С. Ломов // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 11. – С. 1471–1483.

14. ***Lomovtsev, F. E.*** Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Tez. dokl. Seventh Bogdanov Readings on ordinary differential equations dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor Yu.S. Bogdanov, Minsk, June 1–4 2021. – Minsk, 2021. – P. 201–203.

15. ***Новиков, Е. Н.*** Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 с.

16. ***Schwartz, L.*** Theorie des distributions / L. Schwartz. – Paris : Hermann, 1951. – T. 2. – 169 p.

17. ***Владимиров, В. С.*** Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.

18. ***Тихонов, А. Н.*** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.

19. ***Lomovtsev, F. E.*** Generalized Riemann Formula of the Classical Solution to the Cauchy Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients / F. E. Lomovtsev // Материалы Междунар. конф.: XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXII», посвященной памяти А. Д. Баева. – Воронеж, 3–9 мая 2021г. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – С. 288–289.

20. ***Schauder, J.*** Über lineare elliptiche Differentialgleichungen zweiter Ordnung / J. Schauder // Math. Z. – 1934. – Vol. 38. – P. 257–282.

21. ***Ладыженская, О. А.*** Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973. – 408 с.

22. ***Ломовцев, Ф. Е.*** О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов / Ф. Е. Ломовцев // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873–886.

23. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Задача Гурса для сопряженного модельного телеграфного уравнения со скоростью *a(x,t)* в верхней полуплоскости / Ф. Е. Ломовцев // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2022. – № 4. – С. 92–102.

Поступила в редакцию 23.07.2024 г.

Контакты: lomovcev@bsu.by (Ломовцев Федор Егорович)

Lomovtsev F. E. **RIEMANN FORMULAS FOR THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE FIRST QUADRANT OF THE PLANE. II.**

In the previous part of this article, using the right-hand side of the equation, the Riemann method and the new compensation method for the boundary regime were applied to derive the Riemann formulas for a unique and stable classical solution and sufficient correctness conditions for the first mixed problem for an inhomogeneous telegraph equation with variable coefficients in the first quadrant of the plane. In this part of the article, the necessity of these correctness conditions based on the smoothness requirements and three compatibility conditions for the right-hand side of the equation, boundary, and initial data is proved. Important corollaries from the proved global correctness theorem are given. The validity of the obtained Riemann formulas and the correctness criterion is confirmed by proving their agreement with with the known solution formulas and the correctness criterion for the first mixed problem for the model telegraph equation.

Keywords: first mixed problem, telegraph equation, global correctness theorem, correctness criterion, smoothness requirement, matching condition.