

УДК 537.874.6: 681.7.068

## ТЕРАГЕРЦОВЫЕ СЕНСОРЫ НА ОСНОВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ГОФРОМ

**А. В. Шилов**

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**А. Б. Сотский**

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**Д. В. Понкратов**

аспирант кафедры физики и компьютерных технологий

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В настоящей работе исследована проблема создания высокочувствительных сенсоров на основе прямоугольных металлических волноводов с полый сердцевинной и внутренней микроструктурой в виде диэлектрического гофра на одной из границ. Разработан метод расчета полей мод указанных волноводов, основанный на перемножении клеточных матриц. Определены возможные типы мод в названных волноводах. Подробно исследованы вопросы прохождения через них излучения ТЕ поляризации. На этой основе рассчитаны оптимальные параметры волноводов для их использования в газовых и жидкостных сенсорах. Показано, что для сенсорных приложений предпочтительны волноводы с глубоким гофром.*

**Ключевые слова:** прямоугольный металлический волновод, брэгговские дифракционные решетки, высокочувствительные терагерцовые сенсоры.

### Введение

В настоящее время активно развиваются терагерцовые (ТГц) технологии, в которых используется излучение с длинами волн миллиметрового порядка (0,03 – 3 мм) [1]. Среди популярных областей применения можно выделить системы связи и безопасности, микросъемку с высоким разрешением, а также спектроскопию различных веществ [1]. Так, ТГц сенсоры состава водных растворов востребованы в медицине и микробиологии [2]. Однако их создание сталкивается с высоким поглощением ТГц излучения водой, вследствие которого слой воды толщиной больше 200 мкм для ТГц излучения практически не прозрачен [3]. Эта особенность затрудняет импульсную ТГц спектроскопию растворов с использованием стандартной схемы, в которой исследуемое вещество помещается в просвечиваемую кювету [4].

Практический интерес представляют компактные волноводные ТГц сенсоры. Их чувствительные элементы не требуют изгибов, поэтому они могут быть выполнены в виде отрезков прямолинейных прямоугольных металлических волноводов с полый сердцевинной и диэлектрическим микроструктурным заполнением в виде диэлектрического гофра субволнового периода на одной из границ волновода. Можно ожидать, что при условии заполнения сердцевинны таких волноводов исследуемой средой сенсоры данного типа будут обладать высокой чувствительностью к параметрам среды благодаря их

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

резонансному пропусканню. Основанием для этого является широкое использование в различных сенсорах оптического диапазона волокон с актиническими брэгговскими дифракционными решетками [5; 6]. Так, в работе [6] предложили сенсор газообразного водорода на основе сильно протравленной волоконной брэгговской решетки, покрытой композитной пленкой Pd/Ni. Аналогичным образом, в [7] продемонстрировали полированный сбоку датчик водорода на решетке с остаточной толщиной 20 мкм, покрытой композитной пленкой Pd/Ag, пригодный для мониторинга концентрации растворенного водорода в масле силового трансформатора. Однако алгоритмы, используемые для расчета таких волокон, применимы к анализу лишь слабо неоднородных волноведущих структур [5; 8], к которым упомянутые ТГц волноводы не относятся. В результате возникает необходимость в формулировке и программной реализации алгоритмов их расчета.

В настоящей работе разработан метод расчета полей мод прямоугольных металлических волноводов с полой сердцевинной и внутренней микроструктурой в виде диэлектрического гофра на одной из границ, основанный на перемножении клеточных матриц. Определены возможные типы мод в названных волноводах. Подробно исследованы вопросы прохождения через них излучения ТЕ поляризации. На этой основе рассчитаны оптимальные параметры волноводов для их использования в газовых и жидкостных сенсорах.

### Электродинамическая модель волноводной структуры

Конфигурация исследуемых структур иллюстрируется рисунком 1. Область сенсора, заполняемая исследуемой жидкой, либо газовой средой, представляет собой бокс, изолированный от среды, заполняющей регулярный волновод в областях  $z < 0$  и  $z > L$  пробками толщины  $w_0$ , выполненными из того же материала, что и диэлектрический гофр в области сенсора. Гофр имеет  $NP$  периодов. Структура одного периода изображена в центральной части рисунка 1, б.

В поперечном сечении рассматриваемых волноводов могут быть выделены однородные по оси  $z$  частичные области двух типов: прямоугольный металлический волновод с полой сердцевинной и прямоугольный металлический волновод со слоистым диэлектрическим заполнением, для которого выполняется условие

$$\nabla_x \varepsilon = 0. \quad (1)$$

Ограничимся исследованием мод частичной области второго типа, поскольку частичная область первого типа является ее частным случаем. Компоненты полей этих мод подчиняются двум сопряженным системам [9; 10]

$$\Delta H_x^{(v)} + k_0^2 (\varepsilon - \beta_v^2) H_x^{(v)} = \varepsilon^{-1} \nabla_y \varepsilon (\nabla_y H_x^{(v)} - \nabla_x H_y^{(v)}), \quad (2)$$

$$\Delta H_y^{(v)} + k_0^2 (\varepsilon - \beta_v^2) H_y^{(v)} = -\varepsilon^{-1} \nabla_x \varepsilon (\nabla_y H_x^{(v)} - \nabla_x H_y^{(v)}), \quad (3)$$

$$\Delta E_y^{(v)} + k_0^2 (\varepsilon - \beta_v^2) E_y^{(v)} = -\nabla_y [\varepsilon^{-1} (E_x^{(v)} \nabla_x \varepsilon + E_y^{(v)} \nabla_y \varepsilon)], \quad (4)$$

$$\Delta E_x^{(v)} + k_0^2 (\varepsilon - \beta_v^2) E_x^{(v)} = -\nabla_x [\varepsilon^{-1} (E_x^{(v)} \nabla_x \varepsilon + E_y^{(v)} \nabla_y \varepsilon)], \quad (5)$$

где  $v=1,2,\dots$  – номер моды,  $\beta_v$  – ее безразмерная постоянная распространения,  $k_0 = \omega c^{-1} = 2\pi f c^{-1}$  – волновое число вакуума

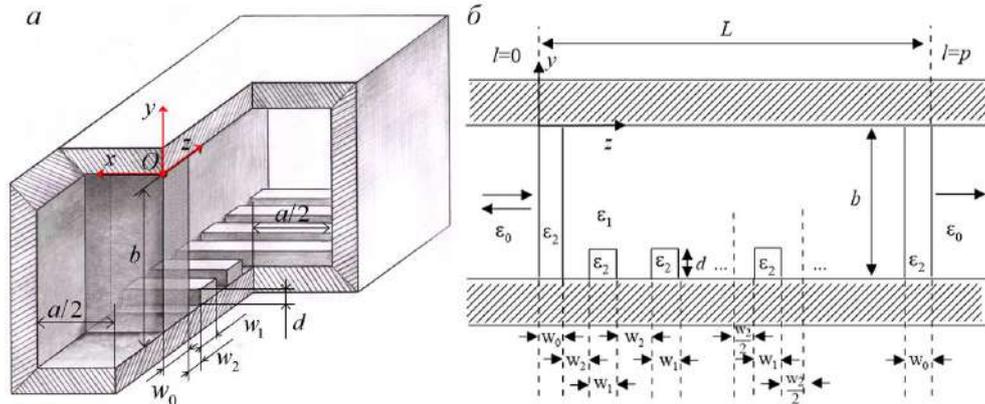


Рисунок 1 – Конфигурация исследуемых волноводов: а) – общий вид, б) – сечение структуры плоскостью  $x = 0$

В силу (1) – (5) все моды в  $l$ -й частичной области разделяются на два типа с тождественно равными нулю компонентами поля  $E_y$ , либо  $H_y$ . Тогда для мод первого типа можно получить уравнения:

$$\Delta E_{lx1}^{(v)} + k_0^2 (\epsilon_l - \beta_{lv1}^2) E_{lx1}^{(v)} = 0, \quad \nabla_x E_{lx1}^{(v)} \Big|_{x=\pm a/2} = 0, \quad E_{lx1}^{(v)} \Big|_{y=0,-b} = 0, \quad (6)$$

$$E_{ly1}^{(v)} = 0, \quad E_{lz1}^{(v)} = q(i\beta_{lv1})^{-1} \nabla_x E_{lx1}^{(v)}, \quad (7)$$

$$H_{lx1}^{(v)} = -q \frac{\nabla_y \nabla_x E_{x1}^{(v)}}{\beta_{lv1} \omega \mu}, \quad H_{ly1}^{(v)} = \frac{q[i\beta_{lv1} E_{lx1}^{(v)} + (i\beta_{lv1})^{-1} \nabla_x^2 E_{lx1}^{(v)}]}{i\omega \mu}, \quad H_{lz1}^{(v)} = \frac{\nabla_y E_{lx1}^{(v)}}{i\omega \mu}, \quad (8)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость вакуума (среды предполагаются не магнитными),  $v$  – номер моды,  $q = 1$  в случае, если мода распространяется в положительном направлении оси  $0z$ ,  $q = -1$  – если в обратном направлении (временная зависимость рассматриваемых монохроматических компонент берется в форме  $\exp(i\omega t)$ ),  $\epsilon_l = \epsilon_l(y)$  – диэлектрическая проницаемость  $l$ -й частичной области.

Решение задачи (6) методом разделения переменных дает:

$$E_{lx1}^{(v)} = [C_{lv1}^{(q)} \exp(-i\beta_{lv1} z) + C_{lv1}^{(q)} \exp(i\beta_{lv1} z)] e_{ln}(y) \xi_k(x), \quad (9)$$

$$\xi_k(x) = \sin(\gamma_k x) \quad (k = 1, 3, \dots), \quad \gamma_k = k\pi a^{-1}, \quad (10)$$

$$\xi_k(x) = \cos(\gamma_k x) \quad (k = 0, 2, \dots), \quad (11)$$

где  $C_{lv1}^{(+1),(-1)}$  – амплитуды мод, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси  $0z$ , функции  $e_{ln}(y)$  являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для плоского металлического волновода со слоистым заполнением

$$\nabla_y^2 e_{ln} + k_0^2 (\epsilon - s_{ln}^2) e_{ln} = 0, \quad e_{ln} \Big|_{y=0,-b} = 0, \quad (12)$$

где  $s_{ln}^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – спектральный параметр. Таким образом,  $v$  в записи

$$\beta_{lv1}^2 = s_{ln}^2 - \gamma_k^2 \quad (13)$$

определяется комбинациями номеров  $k$  и  $n$ .

Для мод второго типа имеем:

$$\varepsilon_l \nabla_y \varepsilon_l^{-1} \nabla_y H_{lx2}^{(v)} + \nabla_x^2 H_{lx2}^{(v)} + k_0^2 (\varepsilon_l - \beta_{lv2}^2) H_{lx2}^{(v)} = 0, \quad H_{lx2}^{(v)} \Big|_{x=\pm a/2} = 0, \quad (14)$$

$$\nabla_y H_{lx2}^{(v)} \Big|_{y=0,-b} = 0, \quad H_{ly2}^{(v)} = 0, \quad H_{lz2}^{(v)} = q(i\beta_{lv2})^{-1} \nabla_x H_{lx2}^{(v)}, \quad (15)$$

$$E_{lx2}^{(v)} = \frac{q \nabla_y \nabla_x H_{lx2}^{(v)}}{\beta_{lv2} \omega \varepsilon_l \mu}, \quad E_{ly2}^{(v)} = -\frac{q [i\beta_{lv2} H_{lx2}^{(v)} + (i\beta_{lv2})^{-1} \nabla_x^2 H_{lx2}^{(v)}]}{i\omega \varepsilon_l}, \quad E_{lz2}^{(v)} = -\frac{q \nabla_x H_{lx2}^{(v)}}{i\beta_{lv2}}. \quad (16)$$

Соотношения, аналогичные (9)–(13), принимают вид:

$$H_{lx2}^{(v)} = [C_{lv2}^{(q)} \exp(-i\beta_{lv2} z) + C_{lv2}^{(q)} \exp(i\beta_{lv2} z)] h_n(y) \zeta_k(x), \quad (17)$$

$$\zeta_k(x) = \cos(\gamma_k x) \quad (k = 1, 3, \dots), \quad (18)$$

$$\zeta_k(x) = \sin(\gamma_k x) \quad (k = 2, 4, \dots), \quad (19)$$

$$\varepsilon_l \nabla_y \varepsilon_l^{-1} \nabla_y h_{ln} + k_0^2 (\varepsilon_l - s_{ln2}^2) h_{ln} = 0, \quad \nabla_y h_{ln} \Big|_{y=0,-b} = 0, \quad (20)$$

$$\beta_{lv2}^2 = s_{ln2}^2 - \gamma_k^2. \quad (21)$$

Суммарное электромагнитное поле в  $l$ -й частичной области имеет вид:

$$\mathbf{E}_l = \sum_{v=1}^r \sum_{p=1}^2 \mathbf{E}_{lp}^{(v)}, \quad \mathbf{H}_l = \sum_{v=1}^r \sum_{p=1}^2 \mathbf{H}_{lp}^{(v)}, \quad (22)$$

где  $r$  – порядок редукции спектральных разложений. Поле (22) однозначно определяется амплитудами мод, входящими в (9) и (17). Для нахождения этих амплитуд следует потребовать непрерывности четырех тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах частичных областей. Применяя к полученным функциональным уравнениям процедуру Галеркина с учетом соотношений ортогональности [11]

$$\int_{-a}^a dx \int_{-b}^0 dy (\mathbf{E}_{lp}^{(v)} \times \mathbf{H}_{lk}^{(\mu)})_z = \delta_{pk} \delta_{v\mu} \int_{-a}^a dx \int_{-b}^0 dy (\mathbf{E}_{lp}^{(v)} \times \mathbf{H}_{lp}^{(v)})_z, \quad (23)$$

нетрудно записать передаточную матрицу границы раздела частичных областей размерности  $4r \times 4r$ , умножение которой на вектор-столбец, составленный из амплитуд мод  $C_{lv1,2}^{(\pm 1)}$ , определяет амплитуды мод  $C_{l+1v1,2}^{(\pm 1)}$ . Перемножение таких матриц дает полную передаточную матрицу нерегулярного участка волновода. Пусть при  $z < 0$  (частичная область  $l = 0$ ) и при  $z > L$  (частичная область  $l = P$ ) волновод является регулярным, а амплитуды  $C_{0v1,2}^{(+1)}$  известны. Тогда из условий  $C_{Pv1,2}^{(-1)} = 0$  может быть получена неоднородная алгебраическая система размерности  $2r \times 2r$  относительно  $2r$  неизвестных амплитуд отраженных мод  $C_{0v1,2}^{(-1)}$ . После решения этой системы полное отраженное поле, поле в частичных областях нерегулярной области и поле, прошедшее нерегулярный участок волновода могут быть рассчитаны на основании (22). Однако реализация указанной общей вычислительной схемы достаточно трудоемка и сталкивается с вычислительными трудностями, связанными с накоплением ошибок округления при перемножении матриц.

Для упрощения расчетов целесообразно учесть явный вид полей мод в частичных областях. Ввиду известных свойств ортогональности тригонометрических функций в (10), (11), (18), (19), из (7) – (11), (15) – (20), (22), (23) можно заключить, что в передаточных матрицах границ раздела частичных областей элементы, связывающие моды с разными

коэффициентами  $\gamma_k$  (см. (10)) равны нулю. Кроме того, связь мод типов 1 и 2 имеет место только в том случае, когда функции  $\xi_k(x)$  и  $\zeta_k(x)$  имеют противоположную четность. Таким образом, если в (10), (11), (18), (19)  $k \neq 0$ , то электромагнитное поле в волноводе формируется модами обоих рассмотренных типов. В нем отличны от нуля все 6 компонент. Заметим, что в выделенных выше частичных областях моды типов 1 и 2 независимы, т.е. гибридный характер поле приобретает в результате дифракции на границах раздела частичных областей.

Особым является случай  $k = 0$  в (11). Согласно (7), (8), в нем поле на регулярных и нерегулярных участках волновода имеет ТЕ поляризацию с однородным вдоль оси  $0x$  пространственным распределением. Оно формируется модами типа 1, не связанными с модами типа 2. Эти моды могут иметь различные спектральные параметры  $s_{m1}^2$ , совпадающие с квадратами их постоянных распространения  $\beta_{lv1}^2$  (см. (13)). Взаимное преобразование данных мод происходит на границах частичных областей по законам планарной оптики, хотя волновод имеет прямоугольное поперечное сечение.

В дальнейшем мы ограничимся анализом указанного простейшего случая дифракционных полей, который представляет и основной практический интерес, поскольку может быть реализован при падении на нерегулярный участок волновода его основной моды, допускающей эффективное торцевое возбуждение сфокусированным ТГц пучком.

В данном случае основные расчетные соотношения имеют вид

$$C_o^+ = N_{++} C_i^+ + N_{+-} C_i^-,$$

где  $N_{++}$  и  $N_{+-}$  – блоки размерности  $r \times r$  клеточной матрицы размерности  $2r \times 2r$  вида

$$N = \begin{pmatrix} N_{++} & N_{+-} \\ N_{-+} & N_{--} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$C_i^+$  и  $C_i^-$  – векторы-столбцы, составленные соответственно из амплитуд падающих и отраженных мод на входе нерегулярного участка волновода,  $C_o^+$  – вектор-столбец амплитуд мод, прошедших нерегулярный участок,

$$C_i^- = -(N_{--})^{-1} N_{-+} C_i^+. \quad (25)$$

Матрица  $N$  представляется произведением клеточных матриц со структурой, аналогичной (24):

$$N = N_o M^{NP} N_i, \quad (26)$$

где

$$(N_{o++})_{nm} = \delta_{nm} \frac{\exp(-i0.5\beta_n^{(2)}k_0w_2)}{4\beta_n^{(0)}\beta_n} [(\beta_n^{(0)} + \beta_n)(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(2)}) \exp(-i\beta_n^{(0)}k_0w_0) - (\beta_n^{(0)} - \beta_n)(\beta_n^{(0)} - \beta_n^{(2)}) \exp(i\beta_n^{(0)}k_0w_0)] \quad (27)$$

$$(N_{o-+})_{nm} = \delta_{nm} \frac{\exp(-i0.5\beta_n^{(2)}k_0w_2)}{4\beta_n^{(0)}\beta_n} [(\beta_n^{(0)} + \beta_n)(\beta_n^{(0)} - \beta_n^{(2)}) \exp(i\beta_n^{(0)}k_0w_0) -$$

$$-(\beta_n^{(0)} - \beta_n)(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(2)}) \exp(-i\beta_n^{(0)}k_0w_0)]$$

$$(N_{o--})_{nm} = \delta_{nm} \frac{\exp(i0.5\beta_n^{(2)}k_0w_2)}{4\beta_n^{(0)}\beta_n} [(\beta_n^{(0)} + \beta_n)(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(2)}) \exp(i\beta_n^{(0)}k_0w_0) -$$

$$-(\beta_n^{(0)} - \beta_n)(\beta_n^{(0)} - \beta_n^{(2)}) \exp(-i\beta_n^{(0)}k_0w_0)]$$

$$(N_i)_{nm} = (N_o)_{nm} \beta_n (\beta_n^{(2)})^{-1}, \quad (31)$$

$$(M_{++})_{nm} = \frac{\exp[-i0.5(\beta_n^{(2)} + \beta_m^{(2)})k_0w_2]}{4\beta_n^{(2)} \langle (e_n^{(0)})^2 \rangle} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^r [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)}) \exp(-i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1) -$$

$$-(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)}) \exp(i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1)] \rho_{nm\mu}$$

$$(M_{+-})_{nm} = \frac{\exp[-i0.5(\beta_n^{(2)} - \beta_m^{(2)})k_0w_2]}{4\beta_n^{(2)} \langle (e_n^{(0)})^2 \rangle} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^r [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)}) \exp(-i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1) -$$

$$-(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)}) \exp(i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1)] \rho_{nm\mu}$$

$$(M_{-+})_{nm} = \frac{\exp[-i0.5(\beta_n^{(2)} - \beta_m^{(2)})k_0w_2]}{4\beta_n^{(2)} \langle (e_n^{(0)})^2 \rangle} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^r [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)}) \exp(i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1) -$$

$$-(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)}) \exp(-i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1)] \rho_{nm\mu}$$

$$(M_{--})_{nm} = \frac{\exp[i0.5(\beta_n^{(2)} + \beta_m^{(2)})k_0w_2]}{4\beta_n^{(2)} \langle (e_n^{(0)})^2 \rangle} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^r [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)}) \exp(i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1) -$$

$$-(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)}) \exp(-i\beta_\mu^{(1)}k_0w_1)] \rho_{nm\mu}$$

$$\rho_{nm\mu} = \langle e_n^{(0)} e_\mu^{(1)} \rangle \langle e_m^{(0)} e_\mu^{(1)} \rangle [(\beta_\mu^{(1)} \langle (e_\mu^{(1)})^2 \rangle)^{-1}], \quad (36)$$

угловые скобки обозначают интегрирование:

$$\langle F \rangle = \int_{-b}^0 F dy.$$

В (27) – (36) под  $e_m^{(0)}$ ,  $\beta_m$  понимается решения спектральной задачи (12) для  $m$ -й моды регулярного полого металлического волновода,  $e_m^{(1)}$ ,  $\beta_m^{(1)}$  – решение данной задачи для  $m$ -й моды частичной области периода, заполненного слоистой средой,  $\beta_m^{(2)}$  – постоянная распространения  $m$ -й моды частичной области периода, заполненной однородной средой,  $\beta_m^{(0)}$  – постоянная распространения  $m$ -й моды пробок на входе и выходе участка нерегулярности.

Следует отметить, что все указанные моды являются вытекающими – их энергия вытекает в металлические стенки и поглощается там. Однако в ТГц диапазоне этот эффект практически не сказывается на поперечных распределениях полей мод, поэтому целесообразно учитывать только его влияние на затухание мод и только в случае использования отрезков волноводов с металлическими стенками метрового порядка [12]. Для соответствующих расчетов комплексных постоянных распространения мод с учетом конечности диэлектрической проницаемости металла эффективен метод вариационного разделения переменных [10, с. 43]. Однако оценки показали, что в рассмотренных ниже сенсорных структурах с сантиметровой, либо субмиллиметровой протяженностью нерегулярного участка эффект вытекания не существует.

Далее предполагается, что на вход нерегулярного участка поступает основная мода волновода. В этом случае  $(C_i^+)_k = \delta_{1k}$ , а энергетические коэффициенты отражения и прохождения излучения для этого участка равны

$$R = \beta_1^{-1} \sum_{j=1}^r \beta_j |(C_i^-)_j|^2, \quad T = \beta_1^{-1} \sum_{j=1}^r \beta_j |(C_o^+)_j|^2.$$

Таблицы 1 и 2 иллюстрируют внутреннюю сходимость разработанной вычислительной схемы при  $NP = 5$ . Здесь и ниже в качестве материала диэлектрической среды выбран циклический олефиновый сополимер (СОС, патентованное название «Торас») с дисперсионными характеристиками, приведенными в [13]. Данные таблиц относятся к  $a = b = 3500 \mu m$ ,  $w_1 = w_2 = 200 \mu m$ ,  $f = 0.55 THz$ . Указанные толщины выбраны в соответствии с возможностями стандартного 3D принтера при изготовлении диэлектрического гофра на стенках волновода. Значение  $f$  соответствует одному из резонансов поглощения влажного воздуха (такой сенсор рассмотрен ниже). Табличные данные относятся к сухому воздуху ( $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 1$ ) и отсутствию ограничивающих пробок ( $w_0 = 0 \mu m$ ).

Таблица 1 – Внутренняя сходимость метода в случае мелкого гофра ( $d = 200 \mu m$ )

$r$	$R$	$T$	$R + T$
1	0.4419	$4.1 \cdot 10^{-22}$	0.4419
5	27.9086	0.9629	28.8715
10	0.0340	0.9910	1.0250
15	0.0076	0.9922	0.9998
20	0.0069	0.9930	0.9999
25	0.0069	0.9930	0.9999

Согласно таблице 1, в случае мелкого гофра корректное описание дифракционных эффектов требует учета большого числа мод ( $r > 15$ ). Это указывает на значительный вклад высших мод в полное поле на выходе нерегулярного участка волновода. Ввиду несовпадения постоянных распространения и групповых скоростей различных мод такая ситуация для сенсорных приложений мало пригодна [12]. Кроме того, в ней эффект отражения излучения от нерегулярного участка волновода слабо выражен.

Случай глубокого (т. е. значение высоты элементов  $d$  приближается к величине зазора  $b$ ) гофра более привлекателен (таблица 2). В нем трансформация основной моды в высшие моды пренебрежимо мала, а отражение излучения от нерегулярного участка волновода существенно.

Таблица 2 – Внутренняя сходимость метода в случае глубокого гофра ( $d = 3450\mu\text{m}$ )

$r$	$R$	$T$	$R + T$
1	0.8192	0.1808	0.9999
5	0.8192	0.1808	0.9999
10	0.8192	0.1808	0.9999
15	0.8192	0.1808	0.9999
20	0.8192	0.1808	0.9999
25	0.8192	0.1808	0.9999

Следует отметить, что в случае полного перекрытия гофром поперечного сечения волновода ( $d = b$ ) моды разного порядка во всех частичных областях структуры становятся ортогональными, а матрицы  $M_{++}, M_{+-}, M_{-+}, M_{--}, N_{++}, N_{+-}, N_{-+}, N_{--}$  – диагональными. В результате разработанный метод становится замкнутым. В этом случае вычисление степени матрицы в (26) по формуле Лагранжа-Сильвестра позволяет получить аналитический результат:

$$R = \frac{\left| i\beta_1^{(2)} q_1 (\beta_1 s + i\beta_1^{(0)} c) + q_2 [\beta_1 \beta_1^{(0)} c - i(\beta_1^{(0)})^2 s] \right|^2}{\left| i\beta_1^{(2)} q_1 (\beta_1 s - i\beta_1^{(0)} c) + q_2 [\beta_1 \beta_1^{(0)} c + i(\beta_1^{(0)})^2 s] \right|^2}, \quad (37)$$

$$T = |t|^2, \quad t = \frac{Zq\beta_1^{(0)} [K \exp(0.5i\beta_1^{(2)} k_0 w_2) + \exp(-0.5i\beta_1^{(2)} k_0 w_2)]}{(1 - pK)(\beta_1^{(0)} c + i\beta_1 s)} \quad (38)$$

$$Z = \frac{2iQ\beta_1 \beta_1^{(0)} \exp(0.5i\beta_1^{(2)} k_0 w_2)}{\beta_1^{(0)} q_2 (i\beta_1 c - \beta_1^{(0)} s) + i\beta_1^{(2)} q_1 (i\beta_1 s + \beta_1^{(0)} c)},$$

$$q_{1,2} = Q \exp(i\beta_1^{(2)} k_0 w_2) \mp 1,$$

$$Q = (1 - Kp)[p(1 - pK) + Kt^2]^{-1},$$

$$K = \frac{i\beta_1^{(0)} (\beta_1^{(2)} - \beta_1) c + [(\beta_1^{(0)})^2 - \beta_1 \beta_1^{(2)}] s}{i\beta_1^{(0)} (\beta_1^{(2)} + \beta_1) c - [(\beta_1^{(0)})^2 + \beta_1 \beta_1^{(2)}] s},$$

$$s = \sin(\beta_1^{(0)} k_0 w_0), \quad c = \cos(\beta_1^{(0)} k_0 w_0),$$

$$p = -\frac{A(\lambda_2^{NP} - \lambda_1^{NP})}{B(\lambda_2^{NP} - \lambda_1^{NP}) + \lambda_2 \lambda_1^{NP} - \lambda_1 \lambda_2^{NP}},$$

$$q = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{B(\lambda_2^{NP} - \lambda_1^{NP}) + \lambda_2 \lambda_1^{NP} - \lambda_1 \lambda_2^{NP}},$$

$$\lambda_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1},$$

$$A = \frac{[(\beta_1^{(1)})^2 - \beta_1^2] \sin(\beta_1^{(1)} k_0 w_1)}{2\beta_1^{(1)} \beta_1},$$

$$B = \frac{\exp(i\beta_1 k_0 w_2) [(\beta_1^{(1)} + \beta_1)^2 \exp(i\beta_1^{(1)} k_0 w_2) - (\beta_1^{(1)} - \beta_1)^2 \exp(-i\beta_1^{(1)} k_0 w_2)]}{4\beta_1^{(1)} \beta_1},$$

$$C = \frac{(\beta_1^{(1)})^2 + \beta_1^2 \sin(\beta_1^{(1)} k_0 w_1) \sin(\beta_1 k_0 w_2) + 2\beta_1^{(1)} \beta_1 \cos(\beta_1^{(1)} k_0 w_1) \cos(\beta_1 k_0 w_2)}{2\beta_1^{(1)} \beta_1}.$$

Вычисления по формулам (37), (38) дают цифры, не отличающиеся от представленных в таблице 2. Это говорит о возможности расчета пропускания сенсорного бокса волновода, содержащего глубокий гофр по приведенным аналитическим формулам. Заметим, что в пределе при  $d \rightarrow b$  эти формулы дают точные отражательную и пропускательную способности структуры.

## 2. Оптимизация параметров сенсоров газовых и жидкостных сред

Продемонстрируем возможность использования модели (37), (38) для расчета оптимизированных конфигураций сенсоров состава воздуха и водяного раствора.

Пусть наличие в воздухе примесного компонента концентрации  $C$  вызывает на частоте  $f$  приращение комплексного показателя преломления воздуха  $\Delta n = C C_0^{-1} \Delta n_0$ , где  $\Delta n_0$  – приращение  $\Delta n$  при некоторой концентрации  $C = C_0$ . Тогда в качестве критерия оптимизации  $W$  естественно принять отношение среднеквадратичных ошибок регистрации  $C$  рассматриваемым сенсором и стандартным сенсором, измеряющим ослабление ТГц сигнала на длине трассы  $L$ , вызванное его поглощением примесным компонентом. В линейном относительно величины ошибки приближении

$$W = 2k_0 L |\operatorname{Im}(\Delta n)| \left| \frac{\partial T}{\partial C} \right|_{C=C_0}^{-1} = k_0 L |\operatorname{Im}(\Delta n)| \left| 2 \operatorname{Re} \left( t^* \frac{\partial t}{\partial \varepsilon_1} \right) \right|_{\varepsilon_1=1}^{-1} \Delta n_0, \quad (39)$$

где  $\varepsilon_1$  – диэлектрическая проницаемость воздуха, заполняющего бокс сенсора (см. рисунок 1, б). Второе равенство в (39) записано в рамках модели (37), (38). Для  $\Delta n_0$  мы использовали выражение

$$\Delta n_0 = 3.34 \cdot 10^{-7} [(f_r^2 - f^2) + i f 9.98 \cdot 10^{-3}]^{-1},$$

где  $f_r = 0.558 \text{ THz}$ , соответствующее рассмотрению в качестве примесного компонента в воздухе водяного пара [12]. Отыскание минимума  $W$  относительно размеров  $w_1$  и  $w_2$  при  $f = 0.55 \text{ THz}$ ,  $NP = 50$ ,  $d \rightarrow b$ , просветляющей толщине пробок  $w_0 = 274 \mu\text{m}$  и указанных выше прочих размерах волновода привело к значениям  $W_{\min} = 0.047$ ,  $w_{1\text{opt}} = 83 \mu\text{m}$ ,  $w_{2\text{opt}} = 182 \mu\text{m}$ , ( $L = 1.33 \text{ cm}$ ),  $d \rightarrow b$ . Более чем 20-кратный эффект увеличения эффективности рассматриваемого сенсора по сравнению со стандартным абсорбционным сенсором достигнут за счет резонансного влияния приращений вещественной части показателя преломления воздуха на пропускание сенсора в условиях брэгговского отражения излучения от нерегулярного участка волновода.

Спектры пропускания устройства при найденных оптимальных  $w_1$  и  $w_2$  и различном числе периодов гофра представлены на рисунке 2.

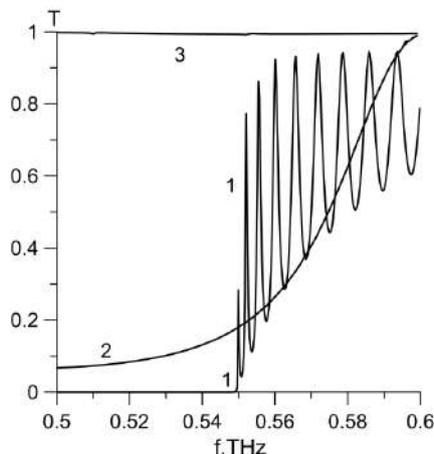


Рисунок 2 - Спектры пропускания воздушного сенсора при  $Np = 50$ ,  $d \rightarrow b = 3500\mu m$  (кривая 1),  $Np = 5$ ,  $d \rightarrow b$ ,  $d = 3450\mu m$  (2),  $Np = 5$ ,  $d = 200\mu m$  (3)

Согласно рисунку 2, максимизация эффективности сенсора обеспечивается его работой вблизи края запрещенной зоны устройства. Этот эффект отчетливо выражен при большом числе периодов гофра и сглаживается при переходе от  $Np = 50$  к  $Np = 5$ . Еще рисунок 2 подтверждает корректность использования модели (37), (38) в случае глубокого гофра (кривые 2, соответствующие случаям  $d \rightarrow b = 3500\mu m$ , и  $d = 3450\mu m$  визуально неотличимы). Отметим также низкую эффективность использования в сенсоре мелкого гофра (ср. кривые 2 и 3).

Критерий (39) получен в линейном приближении зависимости пропускания устройства от концентрации  $C$ . Рисунок 3 иллюстрирует пропускание сенсора в широком диапазоне концентраций водяного пара при  $f = 0.55THz$ . При расчете использована модель (37), (38) при  $Np = 50$ ,  $\epsilon_1 = 1 + 2\Delta n_0 C C_0^{-1}$ .

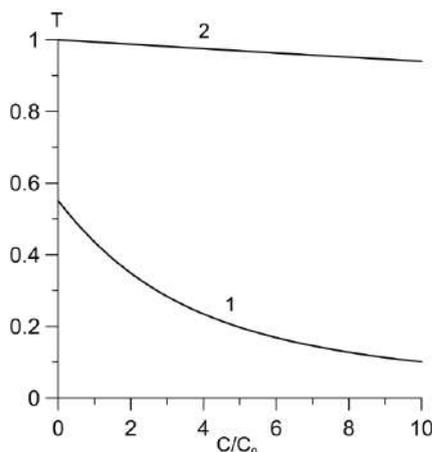


Рисунок 3 – Зависимость пропускания однородной среды (2) и нерегулярного участка волновода (1) от относительной концентрации водяного пара в воздухе

Как следует из рисунка 3, зависимость пропускания оптимизированного сенсора от концентрации примесного компонента, в отличие от пропускания стандартного сенсора является существенно нелинейной. В результате оптимизированный сенсор может эффективно работать в ограниченном диапазоне малых значений  $CC_0^{-1}$ , где зависимость  $T(CC_0^{-1})$  линейна.

При детектировании малой концентрации примесного компонента в воде на основании соотношения

$$C = [I(C)I(0)^{-1} - 1]T \left( \frac{\partial T}{\partial C} \right)_{C=0}^{-1},$$

где  $I(C)$  – мощность излучения на выходе устройства, среднеквадратичная ошибка определения  $C$  равна

$$\sigma(C) = \sqrt{2}\sigma(I) \left( I_0 \left| \frac{\partial T}{\partial C} \right|_{C=0} \right)^{-1} = \sigma(I)I_0^{-1} \left| \sqrt{2} \operatorname{Re} \left( t^* \frac{\partial t}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial C} \right) \right|_{C=0}^{-1},$$

где  $\sigma(I)$  – среднеквадратичная ошибка детектирования мощности на выходе устройства,  $I_0$  – мощность излучения на входе в устройство, а последнее равенство записано на основании модели (37), (38). Таким образом, в данном случае в качестве оптимизационного критерия естественно использовать

$$W = \left| \sqrt{2} \operatorname{Re} \left( t^* \frac{\partial t}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial C} \right) \right|_{C=0}^{-1}. \quad (40)$$

Для оценки эффективности рассматриваемого сенсора мы рассмотрели пример детектирования концентрации кокаина в воде. Использована модель Максвелла Гарнетта для диэлектрической проницаемости раствора [14, с. 98].

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_w [1 + 2C(\varepsilon_c - \varepsilon_w)(\varepsilon_c + 2\varepsilon_w)^{-1}] [1 - C(\varepsilon_c - \varepsilon_w)(\varepsilon_c + 2\varepsilon_w)^{-1}]^{-1}, \quad (41)$$

где  $\varepsilon_w$  – диэлектрическая проницаемость чистой воды [14],  $\varepsilon_c$  – диэлектрическая проницаемость чистого кокаина [15]. В качестве аргументов  $W$  рассмотрены  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ . Отыскание минимума  $W$  осуществлено на частоте  $f = 1.5 \text{ THz}$ , соответствующей одному из резонансов поглощения кокаина [15]. Результаты решения оптимизационной задачи приведены в таблице 3.

**Таблица 3** – Решение оптимизационной задачи для сенсора водного раствора кокаина при различном числе периодов гофра

$NP$	$w_{0 \text{ opt}}, \mu m$	$w_{1 \text{ opt}}, \mu m$	$w_{2 \text{ opt}}, \mu m$	$W$
1	14	0	18	5.01
2	16	36	7	4.35
3	24	40	6	4.30
4	22	48	4	4.29
5	30	48	4	4.29

При  $NP = 1$ ,  $w_1 = 0$  бокс сенсора представляет собой однородную кювету, заполненную раствором. Согласно таблице 3, для пробок такой кюветы существует оптимальная толщина, что объясняется образованием в них стоячих волн. В отличие от воздушного сенсора, эффект повышения эффективности сенсора раствора за счет брэгговского отражения излучения от границ разделов гофра выражен слабо. Кроме того, он наблюдается при весьма тонких частичных областях гофра, заполненных раствором. Это следствие значительного поглощения ТГц волн водой.

Спектры пропускания сенсора при табличных размерах нерегулярной области волновода иллюстрирует рисунок 4.

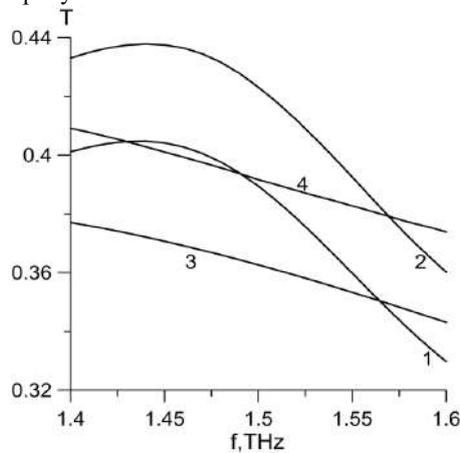


Рисунок 4 – Спектры пропускания сенсора водного раствора кокаина при  $C = 0$ ,  $NP = 4$  (кривая 1);  $C = 0.1$ ,  $NP = 4$  (2);  $C = 0$ ,  $NP = 1$  (3);  $C = 0.1$ ,  $NP = 1$  (4)

Представленные зависимости являются гораздо более пологими по сравнению с аналогичными зависимостями на рисунке 2. Это также результат сглаживающего влияния поглощения излучения водой.

#### Заключение

Итак, сформулированы и реализованы программно алгоритмы решения волноводных задач для вытекающих мод прямоугольных волноводов с металлизированными границами, полый сердцевинной и внутренней микроструктурой в виде диэлектрического гофра на одной из границ, основанные на перемножении клеточных матриц. Определены возможные типы мод в названных волноводах. Подробно исследованы вопросы прохождения через них излучения ТЕ поляризации. Показано, что для сенсорных приложений предпочтительны волноводы с глубоким гофром. Рассчитаны оптимальные параметры волноводов для использования в газовых и жидкостных сенсорах. Установлено, что резонансное влияние приращений вещественной части комплексного показателя преломления воздуха в условиях брэгговского отражения излучения на пропускание волновода позволяет более чем на порядок увеличить чувствительность газового сенсора по сравнению со стандартным абсорбционным сенсором. Отсутствие аналогичного эффекта в случае сенсора водного раствора объясняется существенным поглощением ТГц излучения водой.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Ito, K.* Analysis of transmission properties of terahertz hollow-core optical fiber by using time-domain spectroscopy and application for remote spectroscopy / K. Ito, T. Katagiri, Y. Matsuura // Journal of the Optical Society of America B. – 2017. – Vol. 34, № 1. – P. 60–65.
2. *Ангелуц, А. А.* Характерные отклики биологических и наноразмерных систем в терагерцовом диапазоне частот / А. А. Ангелуц [и др.] // Квантовая электроника. – 2014. – Т. 44, № 7. – С. 614–632.
3. *Mazhorova, A.* Label-free bacteria detection using evanescent mode of a suspended core terahertz fiber / A. Mazhorova [et al.] // Optics Express. – 2012. – Vol. 20, № 5. – P. 5344–5355.
4. *Abdulmunem, O. M.* THz-TDS for Detecting Glycol Contamination in Engine Oil / O. M. Abdulmunem [et al.] // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10, № 11. – P. 3738-1–3738-9.

5. *Caucheteur, C.* Polarization-Assisted Fiber Bragg Grating Sensors: Tutorial and Review / C. Caucheteur, T. Guo, J. Albert // *J. Lightwave Technol.* – 2017. – Vol. 35, № 16. – P. 3311–3322.
6. *Сушко, М. Я.* Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем / М. Я. Сушко, С. Я. Криктив // *ЖТФ.* – 2009. – Т. 79, № 3. – С. 97–101.
7. *Li, X. J.* Design of terahertz metal-dielectric-metal waveguide with microfluidic sensing stub / X. J. Li, J. Song, John X. J. Zhang // *Optics Communications.* – 2016. – Vol. 361. – P.130–137.
8. *Ярив, А.* Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
9. *Войтович, Н. Н.* Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения / Н. Н. Войтович [и др.] // *Радиотехника и электроника.* – 1979. – Т. 24, № 7. – С. 1245–1263.
10. *Сотский, А. Б.* Теория оптических волноводных элементов: монография / А. Б. Сотский. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 456 с.
11. *Снайдер, А.* Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – М. : Радио и связь, 1987. – 656 с.
12. *Сотский, А. Б.* Распространение терагерцевых импульсов в капиллярных волноводах с металлизированной границей / А. Б. Сотский, А. В. Шилов, Л. И. Сотская // *Компьютерная оптика.* – 2017 – Т. 41, № 6. – С. 803–811.
13. *Bao, H.* Fabrication and characterization of porous-core honeycomb bandgap THz fibers / H. Bao [et al.] // *Optics Express.* – 2012. – Vol. 20, Is. 28. – P. 29507–29517.
14. *Consolino, L.* Terahertz frequency metrology for spectroscopic applications: a review / L. Consolino, S. Bartalini, P. De Natale // *J. Infrared Millimeter Terahertz Waves.* – 2017. – Vol. 38, – P. 1289–1315.
15. *Davies, A. G.* Terahertz spectroscopy of explosives and drugs / A. G. Davies [et al.] // *Materials Today.* – 2008. – Vol. 11, № 3. – P. 18–26.

Поступила в редакцию 23.12.2024 г.

Контакты: shilov@m.msu.by (Шилов Артур Владимирович), sotsky@m.msu.by (Сотский Александр Борисович), d.v.ponkratov@yandex.by (Понкратов Дмитрий Васильевич)

***Shilov A. V., Sotsky A. B., Ponkratov D. V. TERAHERTZ SENSORS BASED ON RECTANGULAR METAL WAVEGUIDES WITH DIELECTRIC CORRUGATED FRAME***

*In this paper, the authors study the problem of creating highly sensitive sensors based on rectangular metal waveguides with a hollow core and an internal microstructure in the form of a dielectric corrugation on one of the boundaries. A method has been developed for calculating the mode fields of these waveguides, based on the multiplication of cellular matrices. Possible types of modes in the waveguides have been identified. The issues of transmission of TE polarized radiation through them have been thoroughly examined. Based on this analysis, the optimal parameters for the waveguides for their use in gas and liquid sensors have been calculated. It has been demonstrated that waveguides with deep corrugation are preferable for sensor applications.*

**Keywords:** rectangular metal waveguide, Bragg diffraction gratings, highly sensitive terahertz sensors.